# 4

# ΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΥΜΑΤΙΚΗΣ ΕΞΊΣΩΣΗΣ ΕΠΙΠΕΔΑ Η/Μ ΚΥΜΑΤΑ

## 1.Λύση της κυματικής εξίσωσης στο κενό - χωρίς πηγές

Στα παρακάτω θα λυθεί η κυματική εξίσωση για το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$. Προφανώς τα ίδια ισχύουν για το μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$.Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ισχύει:

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_x(x,y,z,t) + \hat{e}_y E_y(x,y,z,t) + \hat{e}_z E_z(x,y,z,t) \qquad (1)$$

Η εξίσωση $\nabla^2 E = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial^2 E}{\partial t^2}$ χωρίζεται σε τρεις εξισώσεις:

$$\nabla^2 E_x = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_y = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_z = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Θα εξετάσουμε μια οποιαδήποτε από αυτές τις τρεις εξισώσεις, έστω την πρώτη που αναλυτικά γράφεται:

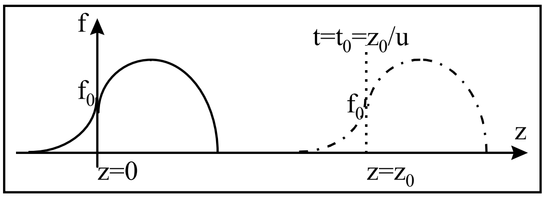
$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \qquad (2)$$

***ΕΠΙΠΕΔΟ ΚΥΜΑ:*** Μια κατηγορία λύσεων της (1), είναι εκείνη του ***επιπέδου κύματος*** .Τα επίπεδα κύματα έχουν τις εξής βασικές ιδιότητες:

**α)**Διαδίδονται κατά συγκεκριμένη διεύθυνση (π.χ. κατά τον άξονα των z)

**β)**Τα μέτωπα του επίπεδου κύματος (δηλαδή τα σημεία όπου η φάση είναι σταθερή, ή αλλιώς οι ισοφασικές επιφάνειες) είναι παράλληλα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης.(βλ. ορισμό φάσης στην επόμενη σελίδα)

**γ)**Προφανώς όλες οι συνιστώσες των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι ανεξάρτητες από τις εγκάρσιες συνιστώσες θέσης στη διεύθυνση διάδοσης(γιατί;).




Σχήμα7

Η συνάρτηση f(z,t)=f(z-ut) παριστάνει επίπεδο κύμα, διαδιδόμενο κατά τον z άξονα με ταχύτητα u, με την έννοια ότι η f είναι σταθερή στο επίπεδο z=σταθερό. Πράγματι έστω η συνάρτηση του Σχήματος 7. Τη χρονική στιγμή t=0 στη θέση z=0 η τιμή της είναι f= f(0)=$f_o$.

Σε μια επόμενη χρονική στιγμή $t_o$, η f θα έχει πάλι $f_o$ στη θέση $z=z_0=ut_o$ τέτοια ώστε το όρισμα (z-ut) να είναι πάλι μηδέν, δηλαδή $f(z_o-ut_o)=f(0)=f_0$.

Με άλλα λόγια η τιμή $f_o$ της f τη στιγμή t=0 στη θέση z=0 έχει τη στιγμή $t=t_o=z_o/u$ μετατοπισθεί στη θέση $z_o$. Το ίδιο ισχύει για οποιαδήποτε άλλη τιμή της f, στην περιοχή που ορίζεται, που σημαίνει ότι τη χρονική στιγμή $t_o$ ολόκληρη η επιφάνεια της f έχει μετατοπισθεί κατά $z_o$.

Λόγω της ιδιότητας (γ) στην περίπτωση επιπέδου κύματος διαδιδόμενου κατά τον άξονα z (όπου οι $E_x, E_y, E_z$, είναι ανεξάρτητες των x, y), η γενική έκφραση (1) περιορίζεται στην :

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_x(z,t) + \hat{e}_y E_y(z,t) + \hat{e}_z E_z(z,t) \tag{3}$$

Η εξίσωση (2) γίνεται τότε:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} \tag{4}$$

Μια λύση της (4), όπως διαπιστώνουμε με απλή αντικατάσταση είναι η $E_\chi = E_{0\chi} f(z-ut)$, όπου f :οποιαδήποτε συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη και $u = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c_0$. Λύση επίσης της (2) είναι και η $E_\chi = E_{0\chi} g(z+ut)$, όπως φαίνεται εύκολα. Το όρισμα (z-ut) ορίζεται σαν ***φάση*** του κύματος έτσι ώστε η ταχύτητα u να εκφράζει το ρυθμό με τον οποίο μια ορισμένη τιμή της φάσης ταξιδεύει. Γι΄ αυτό το λόγο η u καλείται ***φασική ταχύτητα***.
Με βάση την αρχή της υπέρθεσης (superposition principle), κάθε γραμμικός συνδυασμός τους αποτελεί επίσης λύση της (2).
Συνεπώς η γενική λύση της (2) θα είναι της μορφής:

$$E_x = E_{0x}[f(z-ut) + g(z+ut)] \xrightarrow{u=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}=c_0} E_x = E_{ox}[f(z - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t) + g(z + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} t)] \tag{5}$$

Το φυσικό νόημα που κρύβεται στη λύση της μορφής (5) είναι το εξής: Δύο ή περισσότερα κύματα μπορούν να ταξιδεύουν στον ίδιο χώρο ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Πρέπει να σημειωθεί ότι αναμενόταν η λύση να έχει δύο συνιστώσες: η μία αναφερόμενη σε κύμα διαδιδόμενο προς τα εμπρός, και η άλλη σε κύμα προς τα πίσω, αφού ο χώρος θεωρείται εκτεινόμενος απεριόριστα, η δε πηγή δημιουργίας των κυμάτων βρίσκεται σε ένα ορισμένο σημείο (μέσα σε άπειρο χώρο).
Από την (5) φαίνεται αμέσως ότι τα μέτωπα του κύματος (z-ut =σταθερό) για μία δεδομένη χρονική στιγμή θα διέπονται από την εξίσωση z= σταθερό που είναι η εξίσωση επιπέδου κάθετου στη διεύθυνση z. Επίσης η φασική ταχύτητα, δηλαδή η ταχύτητα της επιφάνειας σταθερής φάσης, βρίσκεται από τη σχέση z-ut =σταθερό με παραγώγιση. Οπότε $u_\varphi = dz/dt = u$, όπως και αναμενόταν από τον ορισμό της φασικής ταχύτητας που δώσαμε παραπάνω. Είναι σαφές ότι η f(z-ut) και αντίστοιχα η g(z+ut) πληρούν τις τρεις προϋποθέσεις της προηγούμενης σελίδας και αποτελούν μια γενική έκφραση επιπέδου κύματος.
Η σχέση (5) δίνεται συνήθως με τη μορφή:

$$E_x = E_{ox}[f(kz - \omega t) + g(kz + \omega t)], \qquad \text{όπου } k = \frac{\omega}{u} \text{ ο κυματαριθμός.}$$

Ο λόγος, που μελετάμε λύσεις επιπέδων κυμάτων, είναι ότι για αρκετά μεγάλες αποστάσεις από την πηγή της ακτινοβολίας το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι σε καλή προσέγγιση επίπεδο, με τα μέτωπά του επίπεδες επιφάνειες, κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης. Επίσης η ελάττωση του πλάτους των κυμάτων είναι συνήθως αμελητέα στην περιοχή του ενδιαφέροντος μας.

**Γενική λύση της εξίσωσης :**

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \tag{1}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο χωρισμού μεταβλητών** : Φ(z,t) = Z(z)T(t)

Η (1) γίνεται : $T\dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \dfrac{1}{u^2} Z \dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ και διαιρώντας με ΖΤ καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$$

Η ισότητα αυτή είναι δυνατή μόνο όταν και οι δύο πλευρές είναι ίσες προς την ίδια σταθερά, την οποία γράφουμε: -κ². (Τονίζεται ότι στην παραπάνω διαδικασία αναζήτησης λύσης της κυματικής εξίσωσης διαχωρίζεται το χωρικό τμήμα της λύσης από το χρονικό . Ακολούθως το χωρικό τμήμα $d^2Z/Zdz^2$ τίθεται ίσο με -κ² , δηλαδή ίσο με το αρνητικό τετράγωνο πραγματικού αριθμού , κατοχυρώνοντας έτσι την ανάγκη η αντίστοιχη λύση να είναι παντού πεπερασμένη ).

Επομένως θα έχουμε: $\dfrac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + k^2 Z = 0$ $\dfrac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \omega^2 T = 0$ , με $\omega^2 = k^2 u^2$

Η γενική λύση των εξισώσεων αυτών είναι:

$$Z_k(z) = a_k e^{ikz} + \beta_k e^{-ikz} \quad , \quad T_k(z) = \gamma_k e^{i\omega t} + \delta_k e^{-i\omega t}$$

Μια λύση της (1) για κάποια τιμή της κ προκύπτει σαν το γινόμενο των επιμέρους λύσεων $\Phi_k(z,t)=Z_k(z)T_k(t)$. Επειδή μπορεί να υπάρχουν πολλές πιθανές τιμές του κ, και επειδή πρόκειται για γραμμικές διαφορικές εξισώσεις (οπότε το άθροισμα κάθε τύπου είναι επίσης λύση) η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης θα είναι της μορφής:

$$\Phi(z,t) = \sum_k \left( a_k \cdot \delta_k \cdot e^{i(kz-\omega t)} + \beta_k \cdot \gamma_k \cdot e^{-i(kz-\omega t)} \right) + \sum_k \left( a_k \cdot \gamma_k \cdot e^{i(kz+\omega t)} + \beta_k \cdot \delta_k \cdot e^{-i(kz+\omega t)} \right) \quad (2)$$

Τα ορίσματα είναι της μορφής: $kz \mp \omega t = k(z \mp \frac{\omega}{k} t) = k(z \mp ut)$, οπότε η Φ είναι της μορφής $\Phi(z,t) = f(z-ut) + g(z+ut)$, όπου το πρώτο άθροισμα της (2) αντιστοιχεί στην $f(z-ut)$ και το δεύτερο στην $g(z+ut)$. Ας εξετάσουμε τον όρο $e^{i(kz-\omega t)}$. Θεωρώντας το k>0, ο όρος αυτός αντιπροσωπεύει επίπεδο κύμα που ταξιδεύει κατά τη διεύθυνση των θετικών z με u= ω /k, ενώ ο όρος $e^{i(kz+\omega t)}$ υποδηλώνει επίπεδο κύμα που ταξιδεύει κατά τη διεύθυνση των αρνητικών z με u=ω/k. Όσον αφορά λοιπόν τους πρώτους όρους των αθροισμάτων στη (2) αυτό που ενδιαφέρει είναι η έκφραση $e^{i(kz\mp\omega t)}$. Οι άλλοι δύο όροι των αθροισμάτων της (2) είναι απλά οι συζυγείς μιγαδικοί. Αρκεί λοιπόν για ένα απλό επίπεδο κύμα συγκεκριμένου κ να μελετήσουμε τη μορφή:

$$\Phi(z,t) = \Phi_0 e^{i(kz-\omega t)} \quad (3)$$

όπου $\Phi_o$ σταθερά. Η έκφραση (3) αποτελεί το συνηθισμένο τρόπο αντιπροσώπευσης ενός επιπέδου κύματος. Στην περίπτωση Η/Μ κύματος επειδή η Φ(z,t) είναι μία από τις συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου $\vec{E}$ ή του μαγνητικού πεδίου $\vec{B}$ θα πρέπει να είναι πραγματική, αφού έχει φυσικό περιεχόμενο. Παίρνουμε λοιπόν σαν $\Phi(z,t) = \mathrm{Re}(\Phi_0 e^{i(kz-\omega t)})$. Στην απλούστερη περίπτωση που $\Phi_o$ πραγματικός αριθμός τότε:

$$\mathrm{Re}(\Phi_0 e^{i(kz-\omega t)}) = \Phi_0 \cos(kz - \omega t)$$

Επειδή από πρακτική άποψη είναι πιο βολικές οι πράξεις με την εκθετική έκφραση του κύματος, παρά με ημίτονα και συνημίτονα, συμφέρει να χρησιμοποιούμε στις πράξεις τη μορφή (3) και στο τέλος να παίρνουμε τον πραγματικό ή το συντελεστή του μιγαδικού στους οποίους αποδίδουμε το αντίστοιχο φυσικό περιεχόμενο.

***Το φυσικό περιεχόμενο των παραμέτρων*** $k$ ***και*** $\omega$ *:* Η έκφραση $\varphi = \varphi_0 coz(kz - \omega t)$ δεικνύει ότι το κύμα έχει περιοδικότητα και στον χρόνο και στον χώρο . Η χωρική περίοδος καλείται μήκος κύματος $\lambda$ και είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων της $\varphi(z,t)$ στον χώρο για μία δεδομένη χρονική στιγμή . Η σχέση $\varphi(z,t) = \varphi(z+\lambda,t)$ επιβάλλει ότι μεταξύ των θέσεων $z$ και $z+\lambda$ το όρισμα να αυξάνει κατά $2\pi$ . Με άλλα λόγια
$\varphi_0 coz(k(z+\lambda) - \omega t) = \varphi_0 coz(kz - \omega t + 2\pi)$ δηλ. $2\pi = k\lambda$ . Άρα $k = 2\pi/\lambda$ (4) . Η παράμετρος $k$ καλείται κυματικός αριθμός (wave number) και μετράται σε $m^{-1}$ . Μονάδα του μήκους κύματος $\lambda$ είναι το $A^0$ .( $1A^0 = 10^{-8} cm$ ).
Η αντίστοιχη χρονική περίοδος $T$ του κύματος είναι ο χρόνος που περνά μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων της $\varphi(z,t)$ για μία δεδομένη θέση $z$ . Θα πρέπει πάλι να ισχύει
$\varphi_0 coz(k - \omega(t+T)) = \varphi_0 coz(kz - \omega t + 2\pi)$ , δηλ. $2\pi = \omega T$ . Άρα $\omega = 2\pi/T$ (5) .
Η παράμετρος $\omega$ καλείται κυκλική συχνότης (angular frequency) αφού στην ανάλογη περίπτωση της ομαλής κυκλικής κίνησης αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ακτινίων (radians) που σαρώνονται στην μονάδα του χρόνου . Αξίζει να σημειωθεί εδώ ότι στην ομαλή κυκλική κίνηση ορίζεται και το μέγεθος συχνότης $v$ , σαν ο αριθμός των περιστροφών στην μονάδα του χρόνου . Για το κύμα η συχνότης $v$ αντιπροσωπεύει τον αριθμό των ταλαντώσεων στην μονάδα του χρόνου , σε μία δεδομένη θέση $z$ . Εξ΄ ορισμού $v = 1/T$ και λόγω της (5) $\omega = 2\pi v$ . Μονάδα της κυκλικής συχνότητας $\omega$ είναι το $rad/\sec$ , ενώ της συχνότητας $v$ το $Hertz$ $(1\ Hz = \sec^{-1})$ .
Μέχρις εδώ το φυσικό περιεχόμενο των $k$ και $\omega$ μπορεί να γίνει αντιληπτό σε σύνδεση με τα μεγέθη $\lambda$ και $T$ αντίστοιχα . Προχωρώντας ένα βήμα παρακάτω και δεδομένου ότι γενικά η φάση $\varphi$ του κύματος εκφράζεται με τον όρισμα $\varphi = kz \pm \omega t$ διαπιστώνουμε ότι :

$$\left.\frac{d\varphi}{dz}\right|_t = k \text{ και } \left.\frac{d\varphi}{dz}\right|_z = \pm\omega$$

Δηλαδή το μέγεθος $k$ εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής της φάσης με την απόσταση (χωρικός ρυθμός) για δεδομένη στιγμή $t$ , και το μέγεθος $\omega$ τον ρυθμό μεταβολής της φάσης με τον χρόνο για δεδομένη θέση $z$ (χρονικός ρυθμός) . Δηλαδή υπάρχει αντιστοιχία φυσικών περιεχομένων μεταξύ των μεγεθών $k$ και $\omega$ , το μεν $k$ χαρακτηρίζοντας την χωρική και το $\omega$ την χρονική εξέλιξη της φάσης . Συνδυάζοντας της σχέσεις (4) και (5) έχουμε $\frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T} = \upsilon$ . Τα τρία χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος κ, ω, u συνδέονται με τη σχέση κ=ω/u. Εξ΄ αυτών η ταχύτητα u προσδιορίζεται αποκλειστικά από τις ιδιότητες του μέσου που διαδίδεται το κύμα (π.χ στο κενό $u = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = c_0$). Από την άλλη η κυκλική συχνότητα ω προσδιορίζεται από την πηγή που παράγει το κύμα και θεωρείται σαν ανεξάρτητη μεταβλητή που χαρακτηρίζει το κύμα. Συνεπώς το κ είναι η εξαρτημένη μεταβλητή που προσδιορίζεται από τα ω και u.
Η έκφραση $\vec{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}$ ή καλύτερα η $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\hat{e}_z\cdot\vec{z} - \omega t)}$ για επίπεδο κύμα κατά τη διεύθυνση z είναι συνήθως επαρκής και αρκετά γενική, αφού η διεύθυνση z είναι αυθαίρετη. Εν τούτοις υπάρχουν περιπτώσεις που είναι αναγκαία η επιλογή συστήματος συντεταγμένων x, y, z. Τότε αν $\hat{n}$ η διεύθυνση διάδοσης η ποσότητα

$\hat{e}_z \cdot \vec{z}$ πρέπει να αντικατασταθεί από την $\hat{n}\cdot\vec{r}$, δηλαδή την προβολή της $\vec{r}$ στην διεύθυνση διάδοσης. Η έκφραση του κύματος παίρνει τη μορφή :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\hat{n}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

όπου το $\vec{E}$ είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης. Ορίζοντας το **διάνυσμα διάδοσης** $\vec{k} = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\hat{n}$, το **κυματάνυσμα** $\vec{k}$ όπως λέγεται, τελικά καταλήγουμε

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t)}$$

με $\vec{k} = \hat{e}_x k_x + \hat{e}_y k_y + \hat{e}_z k_z$ .

Από φυσική άποψη το μέτρο του $\vec{k}$ εκφράζει τη μεταβολή φάσης σε ακτίνια ανά μονάδα μετατόπισης κατά τη διεύθυνση διάδοσης $\hat{n}$. Η συνιστώσα $k_z$ εκφράζει την παραπάνω μεταβολή κατά τη διεύθυνση του άξονα z.

*Ερώτηση :* Θεωρώντας τη σχέση u= λ ν και δεδομένου ότι η ταχύτητα είναι διανυσματικό μέγεθος ενώ η συχνότητα ν μονόμετρο θα μπορούσαμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα μήκους κύματος;

*Υπόδειξη :* Από πρώτη άποψη το λ σαν διάνυσμα θα είχε μέτρο, διεύθυνση και φορά. Εν τούτοις σ΄ ένα τέτοιο διανυσματικό μέγεθος οι συνιστώσες του θα μπορούσαν να είναι μεγαλύτερες από το μέτρο του. Πράγματι ανάλογα με τη διεύθυνση διάδοσης ως προς τον άξονα z για παράδειγμα, το $\lambda_z$ θα μπορούσε να είναι μεγαλύτερο (μέχρι και την τιμή άπειρο μπορεί να πάρει) ή μικρότερο (μέχρι και την τιμή μηδέν μπορεί να πάρει) του λ. Η σχέση $u = \lambda\cdot\nu$ είναι σχέση μεταξύ των μέτρων των αντίστοιχων μεγεθών. Η διανυσματική σχέση δίνεται μέσω του κυματάνυσματος και εκφράζεται ως εξής: $\vec{u}\cdot\vec{k} = \omega$.

Η γενική έκφραση, σύμφωνα με όσα έχουν ειπωθεί μέχρι τώρα, ενός επίπεδου Η/Μ κύματος διαδιδόμενου κατά τη διεύθυνση του άξονα των z είναι :

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_x(z,t) + \hat{e}_y E_y(z,t) + \hat{e}_z E_z(z,t)$$

$$\vec{B} = \hat{e}_x B_x(z,t) + \hat{e}_y B_y(z,t) + \hat{e}_z B_z(z,t)$$

Πριν προχωρήσουμε στη μελέτη των ιδιοτήτων των επίπεδων κυμάτων δύο σημεία χρειάζονται επισήμανση:

Πρώτο:Στο ερώτημα : πώς θα βρούμε τη λύση της γενικής κυματικής εξίσωσης:

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

η απάντηση δίνεται από την αρχή της υπέρθεσης. Όλες οι λύσεις της τρισδιάστατης κυματικής εξίσωσης μπορούν να δοθούν σαν υπέρθεση λύσεων της μονοδιάστατης εξίσωσης που ήδη βρήκαμε παραπάνω. Μπορούμε να βρούμε την κυματική εξίσωση των κυμάτων που διαδίδονται κατά τον άξονα χ υποθέτοντας ότι το πεδίο δεν εξαρτάται από τα y και z, των κυμάτων που διαδίδονται κατά τον άξονα y όπου το πεδίο δεν εξαρτάται από τα χ και z και των κυμάτων που διαδίδονται κατά τον άξονα z, όπου το πεδίο δεν εξαρτάται από τα χ και y.

Δεύτερον: Συνήθως μελετάμε κύματα που έχουν μόνο μια συνιστώσα έστω την $E_x$. Η έκφραση $\vec{E} = \hat{e}_x E_x = \hat{e}_x E_{x0} f(z-ut)$ αποτελεί τη μαθηματική εξίσωση **γραμμικά πολωμένου κύματος** που ταξιδεύει κατά τον άξονα z και ταλαντούται στο επίπεδο xz. Αν f(z-ut)=sin (z-ut) τότε έχουμε το **αρμονικό κύμα**. Επιβάλλεται ο αρμονικός όρος να γραφτεί: $\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z-ut)\right]$ για να είναι το όρισμα της συνάρτησης αδιάστατος αριθμός. Ο λόγος που μελετώνται τα αρμονικά κύματα, εκτός από την εύκολη

μαθηματική επεξεργασία τους, είναι ότι με ανάλυση κατά Fourier οποιαδήποτε συνθετότερη μορφή ανάγεται σε άθροισμα ημιτονικών και συνημιτονικών όρων. Στην ουσία η διατύπωση του Fourier, ότι οποιαδήποτε περιοδική κίνηση μπορεί να περιγραφεί ως συνδυασμός απλών αρμονικών κινήσεων, ανάγεται στην αρχή της υπέρθεσης, η οποία, όπου ισχύει, επιτρέπει την ανάλυση πολύπλοκων κινήσεων σε συνδυασμούς απλών κινήσεων.

*Άσκηση :* Εξηγείστε γιατί οι εξισώσεις $y = A(z \pm ut), y = A(z \pm ut)^{1/2}, y = \ln(z \pm ut)$ δεν είναι χρήσιμες στη μελέτη της κυματικής κίνησης.

*Υπόδειξη :* Λάβετε υπόψη την έννοια της περιοδικότητας. Δώστε ένα παράδειγμα μιας άλλης μορφής εξίσωσης μη όντως χρήσιμης για κυματική κίνηση.

## ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΕΠΙΠΕΔΩΝ Η/Μ ΚΥΜΑΤΩΝ

***1$^{ος}$ Τρόπος :*** Θα εργαστούμε στον ελεύθερο χώρο χωρίς πηγές.

**Α. *Τα επίπεδα Η/Μ κύματα είναι εγκάρσια.***

Έστω το κύμα:

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_x(z,t) + \hat{e}_y E_y(z,t) + \hat{e}_z E_z(z,t)$$

$$\vec{B} = \hat{e}_x B_x(z,t) + \hat{e}_y B_y(z,t) + \hat{e}_z B_z(z,t)$$

Είναι: $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(E_x(z,t)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(E_y(z,t)\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(E_z(z,t)\right) = 0$

οι δύο πρώτοι όροι μηδενίζονται οπότε: $$\frac{\partial}{\partial z}\left(E_z(z,t)\right) = 0 \qquad (1)$$

Δηλαδή $E_z$ ανεξάρτητο του z, $E_z = \sigma(t)$ (1΄)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x(z,t) & B_y(z,t) & B_z(z,t) \end{vmatrix} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\hat{e}_x\left[\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial y} - \frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z}\right] - \hat{e}_y\left[\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z}\right] + \hat{e}_z\left[\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial x} - \frac{\partial B_x(z,t)}{\partial y}\right] =$$

$$= \frac{1}{c^2}\left[\hat{e}_x \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} + \hat{e}_y \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} + \hat{e}_z \frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t}\right]$$

προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t} \qquad (3)$$

$$\frac{\partial E_z(z,t)}{\partial t} = 0 \qquad (4)$$

Από την εξίσωση (4) έχουμε ότι $E_z(z,t)$ ανεξάρτητο του t, $Ez = \sigma(z)$ (4΄)
Οι (1΄) και (4΄) επιβάλλουν σ(z) = σ(t) = σταθερό. Για δυναμικά πεδία χωρίς βλάβη της γενικότητας, η σταθερά μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν, οπότε:

$$\boxed{E_z = 0} \qquad \text{(A)}$$

Όμοια:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\Big(B_x(z,t)\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(B_y(z,t)\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(B_z(z,t)\Big) = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\Big(B_z(z,t)\Big) = 0 \quad (5)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z,t) & E_y(z,t) & E_z(z,t) \end{vmatrix} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\hat{e}_x\left[\frac{\partial E_z(z,t)}{\partial y} - \frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z}\right] - \hat{e}_y\left[\frac{\partial E_z(z,t)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}\right] + \hat{e}_z\left[\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial x} - \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial y}\right] =$$

$$= -\left[\hat{e}_x\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t} + \hat{e}_y\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} + \hat{e}_z\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t}\right]$$

προκύπτει:

$$\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z} = \frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t} \qquad (6)$$

$$\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z} = -\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t} \qquad (7)$$

$$\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t} = 0 \qquad (8)$$

Από τις (5) και (8) προκύπτει ότι $B_z(z,t)$ είναι ανεξάρτητο των z και t δηλαδή $B_z$= σταθερό. και χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τη σταθερά ίση με μηδέν:

$$\boxed{B_z = 0} \qquad \text{(B)}$$

Κατά τις (A) και (B) η γενική έκφραση του επίπεδου Η/Μ κύματος γίνεται:

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_x(z,t) + \hat{e}_y E_y(z,t)$$

$$\vec{B} = \hat{e}_x B_x(z,t) + \hat{e}_y B_y(z,t)$$

***<u>Το κύμα ταλαντώνεται κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης, είναι δηλαδή εγκάρσιο</u>***.

Παρατηρούμε από τις σχέσεις (2) και (3), όπως και από τις σχέσεις (6) και (7), ότι χρονική μεταβολή του ενός πεδίου κατά έναν άξονα (έστω x) δημιουργεί το άλλο κατά τον άξονα y. Αυτό το συμπέρασμα μας προϊδεάζει ότι τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Παρακινείται ο αναγνώστης να εξετάσει την περίπτωση διάδοσης των Η/Μ κυμάτων με συνιστώσα παράλληλη στη διεύθυνση διάδοσης. Ένας τρόπος διερεύνησης του θέματος είναι να χρησιμοποιήσει την αρχή της απαγωγής σε άτοπο. Ας υποτεθεί ότι υπάρχει τέτοια συνιστώσα. Τότε αμέσως προκύπτει $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\neq 0$ και γενικότερα η ποσότητα $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ δεν είναι σταθερή. Σχολιάστε. (βλ. και άσκηση 8)

**B.** ***<u>Ισχύει η σχέση:</u>*** $\left|\vec{E}(z,t)\right| = c\left|\vec{B}(z,t)\right|$

Έστω $\vec{E} = \hat{e}_x E_{0x}\sin(\omega t - kz) + \hat{e}_y E_{0y}\sin(\omega t - kz)$. Αναζητώ το αντίστοιχο $\vec{B}$ που δημιουργεί.

**1η απόδειξη**

Χρησιμοποιούμε την εξίσωση: $\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ οπότε προκύπτει:

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & E_y & 0\end{vmatrix}=-\frac{\partial\vec{B}(z,t)}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\hat{e}_x\left[0-\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z}\right]-\hat{e}_y\left[0-\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}\right]+\hat{e}_z\left[\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial x}-\frac{\partial E_x(z,t)}{\partial y}\right]=$$

$$=-\left[\hat{e}_x\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t}+\hat{e}_y\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t}+\hat{e}_z\frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t}\right]$$

οπότε:
$$\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z}=\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial t},\ \frac{\partial E_x(z,t)}{\partial z}=-\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial t},\ \frac{\partial B_z(z,t)}{\partial t}=0$$

Άρα:
$$B_x=\int\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial z}dt=-k\int E_{0y}\cos(\omega t-kz)dt=-\frac{k}{\omega}\int E_{0y}\cos(\omega t-kz)d(\omega t-kz)$$

$$\xrightarrow{\frac{\omega}{k}=c}B_x=-\frac{1}{c}E_{0y}\sin(\omega t-kz)+\sigma_1$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας παίρνουμε τη $\sigma_1$ ίση με μηδέν, οπότε θα έχουμε:

$$\boxed{B_x=-\frac{E_y}{c}}\qquad(1)$$

Αντίστοιχα για τη $B_y$ μπορεί να δειχθεί:

$$\boxed{B_y=\frac{E_x}{c}}\qquad(2)$$

$$\left|\vec{B}\right|=\sqrt{B_x^{\,2}+B_y^{\,2}}=\frac{1}{c}\sqrt{E_x^{\,2}+E_y^{\,2}}=\frac{1}{c}\left|\vec{E}\right|\qquad(3)$$

**2η απόδειξη**

Χρησιμοποιούμε τη σχέση: $\vec{\nabla}\times\vec{B}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Για τη $B_x$ συνιστώσα εύκολα καταλήγουμε στην :

$$\frac{\partial B_x(z,t)}{\partial z}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}\Rightarrow B_x=\frac{1}{c^2}\int\frac{\partial E_y(z,t)}{\partial t}dz=\frac{1}{c^2}\int E_{0y}\cos(\omega t-kz)\cdot\omega\cdot dz=$$

$$=\frac{1}{c^2}\cdot\omega\cdot\frac{E_{0y}}{(\text{-k})}\int\cos(\omega t-kz)d(\omega t-kz)=-\frac{1}{c}E_{0y}\sin(\omega t-kz)+\sigma_2\xrightarrow{\sigma_2=0}B_x=-\frac{E_y}{c}$$

Στην ουσία η σταθερά $\sigma_1$ (1η απόδειξη) είναι ανεξάρτητη του χρόνου και συνεπώς γενικά είναι $\sigma_1=\sigma_1(z)$. Αντίστοιχα (2η απόδειξη) είναι $\sigma_2=\sigma_2(t)$.Για να είναι συμβιβαστές οι λύσεις: $\mathrm{B_x}=-\frac{\mathrm{E_y}}{\mathrm{c}}+\sigma_1(\mathrm{z})$ και $B_x=-\frac{E_y}{c}+\sigma_2(t)$

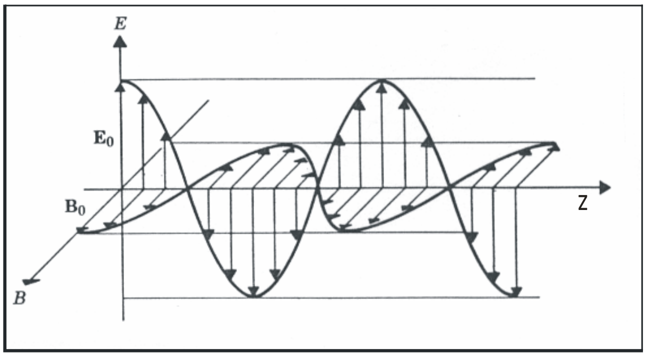
πρέπει $\sigma_1(z)=\sigma_2(t)$=σταθερό και ανεξάρτητο των z και t οπότε μπορούμε να πάρουμε τη σταθερά ίση με μηδέν.

**Γενικά λοιπόν** $\left|\vec{B}\right| = \frac{1}{c}\left|\vec{E}\right|$

Η δύναμη που δέχεται κινούμενο φορτίο με ταχύτητα $\vec{u}$ μέσα σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο είναι: $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{u} \times \vec{B}) = \vec{F}_{\eta\lambda} + \vec{F}_{\mu\alpha\gamma}$. Επειδή u<<c γενικά $\vec{F}_{\eta\lambda} >> \vec{F}_{\mu\alpha\gamma}$. Αυτός είναι ο λόγος που στη μελέτη των ηλεκτρομαγνητικών πεδίων σχεδόν όλοι οι συγγραφείς αναφέρονται στα ηλεκτρικά πεδία και παραλείπουν τα μαγνητικά. Στις περισσότερες περιπτώσεις οι φυσικές συνέπειες των μαγνητικών πεδίων είναι αμελητέες σε σχέση με εκείνες των ηλεκτρικών πεδίων, π.χ. τα περισσότερα οπτικά φαινόμενα σχετίζονται με το $\vec{E}$.

**Γ. Τα διανύσματα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα και συμφασικά**

Είναι $\vec{E} \cdot \vec{B} = E_x \cdot B_x + E_y \cdot B_y = -\frac{E_x \cdot E_y}{c} + \frac{E_y \cdot E_x}{c} = 0 \Rightarrow \vec{E} \perp \vec{B}$




Επίσης από την ανάλυση της προηγούμενης παραγράφου φαίνεται ότι αν γενικά $E = E_0 \sin(\omega t - kz)$, τότε και $B = B_0 \sin(\omega t - kz)$, δηλαδή δεν υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ $\vec{E}$ και $\vec{B}$.

Σχήμα 8

Τα τρία διανύσματα $\vec{E}, \vec{B}, \vec{k}$ σχηματίζουν ένα δεξιόστροφο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Το διπλανό Σχήμα δείχνει ένα στιγμιότυπο του Η/Μ κύματος στο κενό, σε μία δεδομένη χρονική στιγμή, διαδιδόμενο κατά τη διεύθυνση του z άξονα με την ταχύτητα του φωτός c.

***$2^{ος}$ Τρόπος :***

Ένας πιο κομψός τρόπος εύρεσης των ιδιοτήτων των επιπέδων κυμάτων δίνεται παρακάτω . Θεωρώντας τις εκφράσεις των πεδίων $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ , $\vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\vec{\nabla}x\left(f\vec{A}\right) = f\vec{\nabla}x\vec{A} - \vec{A}x\vec{\nabla}f$ το πρώτο μέλος της εξίσωσης $\vec{\nabla}x\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ γίνεται :

$$\vec{\nabla}x\vec{E} = \vec{\nabla}x\vec{E}_0 e^{i(kz-\omega t)} = e^{i(kz-\omega t)}\vec{\nabla}x\vec{E}_0 - \vec{E}_0 x\vec{\nabla}e^{i(kz-\omega t)} = -E_0 x(ik)e^{i(kz-\omega t)}\hat{z} = -ik\vec{E}x\hat{z}$$

.

Επίσης $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \mathrm{B}$

Οπότε $-ik\vec{E}x\hat{z} = -i\omega \mathrm{B}$ $\rightarrow$ $-\vec{E}x\hat{z} = \frac{\omega}{k}\mathrm{B}$ ήτοι $\hat{z}x\vec{E} = \frac{\omega}{k}\mathrm{B}$ , δηλ $\vec{B}$ κάθετο στο διάνυσμα $\vec{E}$ και το $\hat{z}$ .

Απομένει να δειχθεί ότι το $\vec{E}$ είναι κάθετο στο $\hat{z}$.

Η εξίσωση $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ με την βοήθεια της ταυτότητας $\vec{\nabla}(f\vec{A})=f\vec{\nabla}\cdot\vec{A}-\vec{A}\cdot\vec{\nabla}f$ γίνεται :
$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0e^{i(kz-\omega t)}=e^{i(kz-\omega t)}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}_0-\vec{E}_0\vec{\nabla}e^{i(kz-\omega t)}=\ldots=\ ik\vec{E}\hat{z}$
Για να είναι $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0$ πρέπει $\vec{E}$ κάθετο στο $\hat{z}$.

**Άσκηση** : Ξεκινώντας με την εξίσωση $\vec{\nabla}x\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ και χρησιμοποιώντας της ταυτότητα $\vec{\nabla}x(f\vec{A})=f\vec{\nabla}x\vec{A}-\vec{A}x\vec{\nabla}f$ , δείξτε ότι $\vec{B}x\hat{z}=\varepsilon_0\mu_0\dfrac{\omega}{k}\vec{E}$ δηλ. $\vec{E}$ είναι κάθετο στο $\hat{z}$ και στο $\vec{B}$. Επίσης από την εξίσωση $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ δείξτε ότι $\vec{B}$ κάθετο στο $\hat{z}$ .

**<u>Γενικές παρατηρήσεις :</u>**

α) Μέχρις εδώ έχουν συλλεγεί αρκετά στοιχεία που συνηγορούν ότι το φως είναι Η/Μ κύμα : ι) Στις διαφορικές εξισώσεις $\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\,\partial^2\vec{E}/\partial^2 t=0$ και $\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\,\partial^2\vec{B}/\partial^2 t=0$ η ταχύτητα $\upsilon=1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}=3x10^8\ m/\sec$ , είναι η ταχύτητα του φωτός στο κενό . ιι) Στο Η/Μ κύμα τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι εγκάρσια και κάθετα μεταξύ τους . Το ίδιο διαπιστούται πειραματικά για το φως. ιιι) Το Η/Μ κύμα διαδίδεται στο κενό όπως και το φως . Την διάδοση μέσα στην ύλη θα την δούμε στα επόμενα κεφάλαια . Σημειώνουμε πάντως ότι και μέσα στην ύλη το φως συμπεριφέρεται όπως και τα Η/Μ κύματα . Γενικά δηλαδή το φως πληροί όλες τις ιδιότητες των Η/Μ κυμάτων , έχει την ίδια συμπεριφορά με αυτά και συνεπώς είναι αδιαμφισβήτητα Η/Μ κύμα .

β) Το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων Maxwell στο κενό χωρίς πηγές , θεωρούμενο σα δύο ζεύγη διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης : ($\nabla\vec{E}=0$ , $\nabla x\vec{E}=-\partial\vec{B}/\partial t$ ), ($\nabla\vec{B}=0$ , $\nabla x\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\,\partial\vec{E}/\partial t$ ) , όπου σε κάθε ζεύγος τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ εμπλέκονται μεταξύ τους , οδηγούν σε ένα ζεύγος διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης : ( $\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\,\partial^2\vec{E}/\partial^2 t=0$ , $\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\,\partial^2\vec{B}/\partial^2 t=0$ ) τις κυματικές εξισώσεις , όπου τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ έχουν απεμπλακεί. Η αντίστροφη διαδικασία δεν ισχύει ˙ δηλαδή οι δύο κυματικές εξισώσεις δεν αρκούν για να οδηγηθούμε στις τέσσερις εξισώσεις Maxwell . Ο λόγος είναι προφανής . Η μετάβαση από διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης σε διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης μέσω παραγωγίσεων οδηγεί σε απώλεια πληροφορίας ˙ (αυτό είναι το τίμημα για την απεμπλοκή των μεταβλητών $\vec{E}$ και $\vec{B}$ ). Έτσι , αν δεν προσέξει κανείς , μπορεί από τις κυματικές εξισώσεις να συμπεράνει π.χ ότι υπάρχει ανεξάρτητο ηλεκτρικό κύμα και ανεξάρτητο μαγνητικό κύμα , πράγμα που είναι λανθασμένο αφού και πειραματικά αποδεικνύεται ότι το κύμα είναι Η/Μ , διαδίδεται δηλαδή ταυτόχρονα ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο , όπως ακριβώς πρεσβεύουν οι τέσσερις εξισώσεις Maxwell . Αυτή η σημαντική πληροφορία έχει χαθεί στο ζεύγος των κυματικών εξισώσεων . Επί πλέον το ζεύγος των δύο κυματικών εξισώσεων επιτρέπει την διάδοση και εγκάρσιων και διαμήκων Η/Μ κυμάτων , ενώ τα Η/Μ κύματα είναι εγκάρσια όπως πρεσβεύουν οι τέσσερις εξισώσεις Maxwell . Επίσης η διατήρηση του φορτίου δεν εμπεριέχεται στις κυματικές εξισώσεις . Πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και την εξίσωση της συνέχειας $\nabla\vec{J}+\partial p/\partial t=0$ , αν θέλουμε μαζί με τις κυματικές εξισώσεις να οδηγηθούμε στις εξισώσεις του Maxwell . Γενικά το σύστημα των δύο κυματικών εξισώσεων δεν είναι ισοδύναμο προς το σύστημα των τεσσάρων εξισώσεων Maxwell . Το τελευταίο είναι γενικότερο αλλά και πλήρες.

γ) Οι εξισώσεις του Maxwell συνδέουν τον ηλεκτρισμό και τον μαγνητισμό . Διαπιστώστε ότι σε γενικές γραμμές , αν εναλλάξουμε όλα τα σύμβολα που αφορούν το ηλεκτρικό πεδίο με τα σύμβολα που αφορούν το μαγνητικό πεδίο ( λαμβάνοντας υπ΄ όψη και τις σταθερές που μπαίνουν για τις μονάδες ) δημιουργούνται πάλι οι ίδιες εξισώσεις . Αυτή η συμμετρία βρίσκεται πίσω από την ενοποίηση της ηλεκτρικής και της μαγνητικής δύναμης σε μία ενιαία ηλεκτρομαγνητική δύναμη την οποία πέτυχε ο Maxwell . (Από το βιβλίο «οι αριθμοί της φύσης» , του Ian Stewart ).

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Δίνονται τα πεδία: $\vec{E}=\hat{e}_x E_x(x,y,z,t)=\hat{e}_x E_{0x}\sin(kz-\omega t)$ και $\vec{B}=\hat{e}_y B_y(x,y,z,t)=$ $=\hat{e}_y B_{0y}\sin(kz-\omega t)$. Δείξτε με τη βοήθεια των εξισώσεων του Maxwell ότι συνιστούν επίπεδο Η/Μ κύμα και αποδείξτε τις σχετικές ιδιότητες.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial E_x}{\partial x}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\Rightarrow\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}=0\Rightarrow\frac{\partial B_y}{\partial y}=0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0 & B_y & 0\end{vmatrix}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{e}_x\left[0-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right]-\hat{e}_y[0-0]+\hat{e}_z\left[\frac{\partial B_y}{\partial x}-0\right]=\hat{e}_x\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t}\Rightarrow$$

$$-\frac{\partial B_y}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial E_x}{\partial t} \qquad (3) \qquad\qquad \frac{\partial B_y}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\begin{vmatrix}\hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ E_x & 0 & 0\end{vmatrix}=-\hat{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\hat{e}_x[0-0]-\hat{e}_y\left[0-\frac{\partial E_x}{\partial z}\right]+\hat{e}_z\left[0-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right]=-\hat{e}_y\frac{\partial B_y}{\partial t}\Rightarrow$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}=-\frac{\partial B_y}{\partial t} \qquad (5) \qquad\qquad \frac{\partial E_x}{\partial y}=0 \qquad (6)$$

Διαπιστώστε ότι οι εξισώσεις (1) έως (6) ικανοποιούνται από τα παρακάτω πεδία:

$(1),(6)\Rightarrow E(x,y,z,t)=E(z,t)$

$(2),(4)\Rightarrow B(x,y,z,t)=B(z,t)$

(5)→ για το συγκεκριμένο κύμα θα ισχύει: $$\frac{\partial\vec{E}}{\partial z}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z\cdot\partial t} \qquad (7)$$

(3)→όμοια $$-\frac{\partial\vec{B}}{\partial z}=\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\Rightarrow\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z\cdot\partial t}=-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} \qquad (8)$$

(7),(8)→ $$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ανάλογα αποδείξτε : $$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Συνεπώς τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ διαδίδονται κατά τον άξονα z, πάλλονται κάθετα σ΄ αυτόν και δεν εξαρτώνται από τις εγκάρσιες συνιστώσες θέσης, άρα συνιστούν Η/Μ κύμα. Φαίνεται αμέσως ότι ισχύει και $\vec{E} \perp \vec{B}$.

Έστω τώρα: $E_x = E_{0x}\sin(\omega t - kz)$ $\quad B_y = B_{0y}\sin(\omega t - kz)$

Από την $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial z} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ έχουμε $kE_{0x}\cos(\omega t - kz) = -(-\omega)B_{0y}\cos(\omega t - kz)$

δηλαδή $kE_{0x} = \omega B_{0y}$, $E_{0x} = \dfrac{\omega}{\mathrm{k}} B_{0y}$,δηλαδή: $\boxed{E_{0x} = \mathrm{c}B_{0y}}$

**2.** Ηλεκτρικό πεδίο έχει την έκφραση $\vec{E} = E_{0y}\sin(\omega t - kz)\hat{j}$ στο κενό. Προσδιορίστε τα $\vec{D}, \vec{B}, \vec{H}$. Σχεδιάστε τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ τη χρονική στιγμή t=0. Διαπιστώστε ότι τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ συνιστούν επίπεδο Η/Μ κύμα, του οποίου η ταχύτητα εξαρτάται μόνο από τις ιδιότητες του εξωτερικού χώρου $(\varepsilon_0 = 10^{-19}/36\pi \ F/m, \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7} \ H/m)$.

Κατ΄ αρχήν είναι:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 E_{0y}\sin(\omega t - kz)\hat{j} \qquad (1)$$

Περαιτέρω χρησιμοποιώντας την εξίσωση $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ έχουμε για την περίπτωσή μας:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_{0y}\sin(\omega t - kz) & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

ή $$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = kE_{0y}\cos(\omega t - kz)\hat{i}$$

οπότε $$\vec{B} = -\frac{kE_{0y}}{\omega}\sin(\omega t - kz)\hat{i} + c(x,y,z)$$

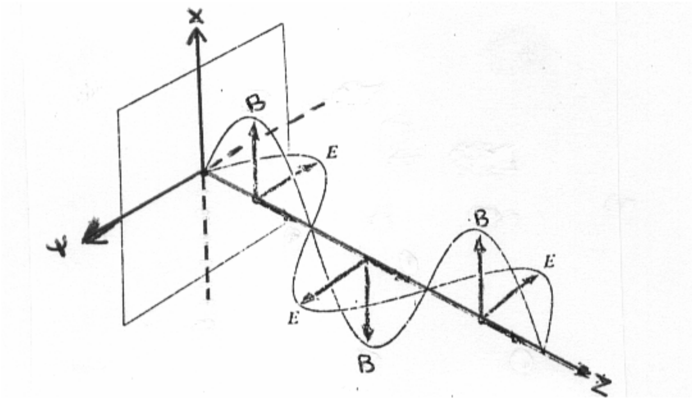
Η σταθερά c(x,y,z) εκφράζουσα ένα στατικό πεδίο μπορεί να τεθεί μηδέν, οπότε:

$$\vec{B} = -\frac{kE_{0y}}{\omega}\sin(\omega t - kz)\hat{i} = -B_{0x}\sin(\omega t - kz)\hat{i} \qquad (2)$$

Αμέσως προκύπτει ότι: $$\vec{H} = -\frac{kE_{0y}}{\omega\mu_0}\sin(\omega t - kz)\hat{i} \qquad (3)$$

Επειδή: $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Τη χρονική στιγμή t=0 είναι $\sin(\omega t - kz) = -\sin(kz)$. Θεωρώντας $E_{0y}$ και $k$ θετικά έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση.




Σχήμα 9

$$E_{t=0} = -E_{0y}\sin(kz)$$
$$B_{t=0} = \frac{k\cdot E_{0y}}{\omega}\sin(kz)$$

Ακολουθώντας τη διαδικασία της άσκησης 1 αποδεικνύεται εύκολα ότι οι εξισώσεις του Maxwell στο κενό ικανοποιούνται. Ισχύουν επίσης οι κυματικές εξισώσεις: $\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$ και $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$. Επίσης τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους και δεν εξαρτώνται από τις εγκάρσιες συνιστώσες θέσης. Η φάση και στα δύο είναι: φ=ωt-kz. Για τα μέτωπα πρέπει ωt-kz= σταθερό. Αν τη χρονική στιγμή $t=t_o$ είναι z=0 τότε $\omega t - kz = \omega t_0$, οπότε $z = \frac{\omega}{k}(t - t_0)$ και $\frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k}$. Η $z = \frac{\omega}{k}(t - t_0)$ είναι εξίσωση επιπέδου κάθετου στον άξονα z κινουμένου με ταχύτητα c=ω/k. Δηλαδή το μέτωπο του κύματος (ισοφασικές επιφάνειες) είναι επίπεδα κινούμενα με σταθερή ταχύτητα. Άρα τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ συνιστούν επίπεδο Η/Μ κύμα. Από την κυματική εξίσωση βρίσκεται ότι: $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$, δηλαδή η ταχύτητα του κύματος εξαρτάται από τις ιδιότητες του μέσου στο οποίο διαδίδεται ( εδώ από τα $\varepsilon_o$ και $\mu_o$ του κενού) .

**3.** Δίνονται στο κενό, χωρίς πηγές, τα πεδία $\vec{E} = E_{0x}\sin(\omega t - kz)\,\hat{i}$ και $\vec{H} = \frac{E_{0x}}{n}\sin(\omega t - kz)\,\hat{j}$. Προσδιορίστε την παράμετρο η συναρτήσει των $\omega, \varepsilon_0, \mu_0$ έτσι ώστε τα πεδία να ικανοποιούν τις εξισώσεις του Maxwell.

Από τις σχέσεις : $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ και $H=B/\mu_0$ προκύπτει :

$\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j} = -\mu_0\frac{\partial H_y}{\partial t}\hat{j}$. Για τις συγκεκριμένες εκφράσεις των $\vec{E}$ *και* $\vec{H}$ η σχέση αυτή δίνει:

$$k\cdot E_{0x}\cos(\omega t - kz) = \omega\cdot\mu_0\frac{E_{0x}}{n}\cos(\omega t - kz) \Rightarrow k = \frac{\omega\cdot\mu_0}{n} \qquad (1)$$

Ομοίως από την εξίσωση: $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ έχουμε:

$$-\frac{\partial H_y}{\partial z}\hat{i} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}\hat{i} \Rightarrow \frac{kE_{0x}}{n}\cos(\omega t - kz) = \omega\cdot\varepsilon_0 E_{0x}\cos(\omega t - kz) \Rightarrow k = \omega\cdot\varepsilon_0\cdot n$$

(2) .

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $n = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$. Επίσης προκύπτει ότι: $\omega/k = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο η παράμετρος $n = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$ εκφράζει το φυσικό μέγεθος **εμπέδηση** $\left(E_x/H_y = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}\right)$. Προς το παρόν σημειώστε για μια ακόμα φορά ότι η ταχύτητα (και η εμπέδηση) εξαρτώνται μόνο από τις ιδιότητες του μέσου που διαδίδεται το κύμα.

**4.** Εξετάστε αν τα πεδία $\vec{E} = E_0\cos x\cdot\cos t\;\hat{j}$ και $\vec{B} = E_0\sin x\cdot\sin t\;\hat{k}$ στο κενό συνιστούν κύμα.

Διάδοση κατά τον άξονα x .

Από την εξίσωση του Maxwell: $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ έχουμε :

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_0\sin x\cdot\sin t \end{vmatrix} = \varepsilon_0\mu_0\left[0\cdot\hat{i} + \frac{\partial E_y}{\partial t} + 0\cdot\hat{k}\right] \Rightarrow$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[E_0\sin x\cdot\sin t\right]\cdot\hat{j} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left[E_0\cos x\cdot\cos t\right]\hat{j} \Rightarrow -E_0\cos x\cdot\sin t = -\varepsilon_0\mu_0 E_0\cos x\cdot\sin t$$

δηλαδή $\varepsilon_0\mu_0 = 1$ που είναι λάθος. Άρα δεν συνιστούν Η/Μ κύμα.

Την απάντηση αυτή την περιμέναμε καθώς τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ έχουν τα ίδια πλάτη .

*Σημείωση :* Μία δεύτερη λύση είναι να θέσουμε τις εκφράσεις των $\vec{E}$ και $\vec{B}$ στην κυματική εξίσωση και να δείξουμε ότι δεν την ικανοποιούν . Διαπιστώστε περαιτέρω ότι αν τα πεδία είχαν μορφή $\vec{E} = E_0\cos kx\cdot\cos\omega t\;\hat{j}$ , $\vec{B} = E_0\sin kx\cdot\sin\omega t\;\hat{k}$ , ενώ κάθε ένα χωριστά ικανοποιεί την κυματική εξίσωση, εντούτοις δεν αποτελούν Η/Μ κύμα αφού δεν ισχύει η σχέση $E_0 = cB_0$. (Σημειώστε ότι εδώ για το μαγνητικό πεδίο εδόθει $B_0=E_0$). Επομένως η δεύτερη λύση μειονεκτεί της πρώτης.

**5.** Δίνεται στο κενό χωρίς πηγές το ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E} = E_0\cos kx\cdot\cos\omega t\;\hat{k}$ και ζητείται το μαγνητικό πεδίο που είναι συνδεδεμένο μ΄ αυτό.

Διάδοση κατά τον άξονα x .

Από την $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ προκύπτει $-\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{\partial B_y}{\partial t} = -k\cdot E_0\sin kx\cdot\cos\omega t$,

οπότε
$$B_y = -\frac{k}{\omega}E_0\sin kx\cdot\sin\omega t + \sigma(x) \qquad (1)$$

Από την $\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ προκύπτει $\dfrac{\partial B_y}{\partial x} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial E_z}{\partial t} \Rightarrow \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = -\varepsilon_0\mu_0\omega E_0\cos kx\cdot\sin\omega t$

οπότε $$B_y = -\frac{\varepsilon_0\mu_0\omega}{k} E_0 \sin kx \cdot \sin\omega t + \sigma(t) \quad (2)$$

Θεωρώντας τις σταθερές σ(x) και σ(t) μηδέν οι σχέσεις (1) και (2) είναι συμβατές όταν $-\frac{k}{\omega} = -\frac{\varepsilon_0\mu_0\omega}{k}$ ή $k^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0$ ή $\frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}}$ . Από την (1) τότε προκύπτει: $B = -\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} E_0 \sin kx \cdot \sin\omega t$

**6.** Δείξτε ότι η $y = \cos(kz)\cdot\cos(\omega t)$, συνιστά λύση της κυματικής εξίσωσης. Δίνεται πεδίο με $E_x(z,t) = A\cos(kz)\cdot\cos(\omega t)$ (στάσιμο Η/Μ κύμα). Δείξτε ότι $c\cdot B_y(z,t) = A\sin(kz)\cdot\sin(\omega t) = E_x(z-\lambda/4, t-T/4)$, δηλαδή ότι τα E και B έχουν $90^0$ διαφορά φάσης στο χρόνο και στο χώρο. Ισχύει :

$\cos(A \pm B) = \cos A\cdot\cos B \mp \sin A\cdot\sin B$ άρα:

$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2\cdot\cos A\cdot\cos B$ συνεπώς:

$$y = \cos(kz)\cdot\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left[\cos(kz+\omega t) + \cos(kz-\omega t)\right]$$

Η τελευταία όμως είναι η λύση της κυματικής εξίσωσης. Όσον αφορά στο δεύτερο ερώτημα, έχουμε δείξει ότι : $\frac{\partial B_y(z,t)}{\partial z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$

$$\Rightarrow c\cdot B_y(z,t) = -\frac{1}{c}\int\frac{\partial E_x}{\partial t}dz \Rightarrow c\cdot B_y(z,t) = -\frac{1}{c}\int -A\cdot\omega\cdot\sin(\omega t)\cdot\cos(kz)dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot B_y(z,t) = \frac{A\cdot\omega}{c}\sin(\omega t)\frac{1}{k}\int\cos(kz)d(kz) \Rightarrow c\cdot B_y(z,t) = \frac{A\cdot\omega}{ck}\sin(\omega t)\sin(kz) + f(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\cdot B_y(z,t) = A\sin(\omega t)\sin(kz)$$

Δικαιολογήστε γιατί μπορούμε να πάρουμε χωρίς βλάβη f(t)=0. (Χρησιμοποιήστε τη σχέση: $\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$ ).Έχουμε λοιπόν:

$$\mathrm{c}\cdot \mathrm{B_y}(\mathrm{z,t}) = \mathrm{A}\sin(\omega \mathrm{t})\sin(\mathrm{kz}) = \mathrm{A}\cdot\cos(\omega\mathrm{t}-90)\cdot\cos(\mathrm{kz}-90) \Rightarrow \mathrm{c}\cdot\mathrm{B_y}(\mathrm{z,t}) = \mathrm{E_x}(\mathrm{z}-\lambda/4,\mathrm{t}-\mathrm{T}/4)$$

**7.** Δείξτε ότι το Η/Μ πεδίο

$$\vec{E} = \hat{e}_x E_0\cos(kz-\omega t) \pm \hat{e}_y E_0\cos(kz-\omega t)$$

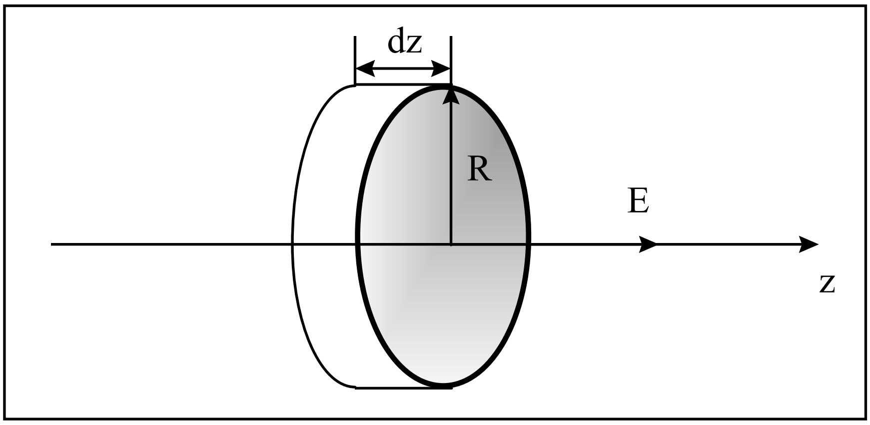
$$\vec{B} = \mp\hat{e}_x B_0\cos(kz-\omega t) + \hat{e}_y E_0\cos(kz-\omega t)$$

αποτελεί μια άλλη λύση επίπεδου κύματος.

Το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο του παραπάνω κύματος είναι αποτέλεσμα του συνδυασμού δύο γραμμικά πολωμένων επιπέδων κυμάτων με διαφορά φάσης $\pm 90^0$ Το πλάτος κάθε πεδίου είναι σταθερό, αλλά το άνυσμα της έντασης περιστρέφεται γύρω από τη διεύθυνση διάδοσης (κυκλικά πολωμένο κύμα). Σε χρόνο μιας περιόδου, κάθε πεδίο εκτελεί μια πλήρη περιστροφή. Το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνέχεια κάθετο στο μαγνητικό. Η ανάλυση μπορεί να επεκταθεί και σε πεδία που οι συνιστώσες έχουν διαφορά φάσης διάφορη των $90^0$ και τα αντίστοιχα πλάτη είναι άνισα(ελλειπτικά πολωμένο κύμα).

Συμπέρασμα: Η λύση των επιπέδων κυμάτων στις εξισώσεις του Maxwell είναι γενική και συνδυασμοί τέτοιων λύσεων μπορούν να οδηγήσουν σε διάφορες καταστάσεις πόλωσης.

**8.** Δείξτε ότι δεν μπορεί να υπάρχουν συνιστώσες του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου παράλληλες προς τη διεύθυνση διάδοσης ενός Η/Μ κύματος στο κενό




Σχήμα 10

Έστω ότι υπάρχει τέτοια συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου $E_z = \hat{k}E_z(z-ct)$. Κατά την πρώτη εξίσωση Maxwell πρέπει $\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = 0$ (1)

Ορίζουμε σαν επιφάνεια S μια κλειστή επιφάνεια δίσκου, κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης, πάχους dz και ακτίνας R. Θα έχουμε:

$$\int \vec{E}\cdot d\vec{s} = [E_z(z+dz-c(t+dt)) - E_z(z-ct)]\cdot \pi R^2 = \left(\frac{\partial E_z}{\partial z}dz + \frac{\partial E_z}{\partial t}dt\right)\cdot \pi R^2 \overset{(1)}{=} 0 \qquad (2)$$

Αυτό όμως σημαίνει, ότι οι μερικές παράγωγοι θα πρέπει να είναι μηδέν, δηλαδή:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0,$$

που σημαίνει Ez=0 ή Ez= σταθ. ανεξάρτητο του χρόνου και της θέσης. Αλλά τότε το Ε δεν μπορεί να αποτελεί την ηλεκτρική συνιστώσα ενός Η/Μ κύματος. Η ίδια διαδικασία ισχύει και για το Β. Συνεπώς δεν υπάρχει συνιστώσα του Η/Μ πεδίου παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.

**9.** Διαπιστώστε ότι η μη ύπαρξη του σημείου **(–)** στην 4$^{η}$ εξίσωση του Maxwell οδηγεί στις εξής διαφορικές εξισώσεις για τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ :

$\vec{\nabla}^2\vec{E} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{E}}{\partial^2 t} = 0$ , $\vec{\nabla}^2\vec{B} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial^2\vec{B}}{\partial^2 t} = 0$ . (Δείξτε ότι οι λύσεις των εξισώσεων αυτών, π.χ για το $\vec{E}$ είναι : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{\pm\omega t}\cos Kz$ (αντίστοιχα για το $\vec{B}$). Η πρώτη λύση είναι χωρική ταλάντωση με πλάτος συνεχώς αυξανόμενο με τον χρόνο(έκρηξη) . Η δεύτερη λύση είναι φθίνουσα με τον χρόνο ταλάντωση. Και οι δύο περιπτώσεις δεν αντιστοιχούν σε κυματική διάδοση .

## 2. <u>Η λύση της κυματικής εξίσωσης στο κενό με πηγές</u>

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \qquad (3)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

$$(4)\Rightarrow\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\Rightarrow\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E})-\nabla^2\vec{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mu_0(\vec{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})\Rightarrow$$

$$\vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)-\nabla^2\vec{E}=-\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}=\vec{\nabla}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)+\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}} \qquad (5)$$

$$(3)\Rightarrow\ \vec{\nabla}\times\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0(\vec{\nabla}\times\vec{j})+\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\Rightarrow\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})-\nabla^2\vec{B}=\mu_0\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{j})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}=-\mu_0(\vec{\nabla}\times\vec{j})} \qquad (6)$$

Η λύση των εξισώσεων (5) και (6) προκύπτει σαν το άθροισμα των λύσεων των ομογενών εξισώσεων συν μια μερική λύση που ανταποκρίνεται στις συναρτήσεις του δεύτερου μέλους των (5) ,(6).

### 3.<u>Η λύση της κυματικής εξίσωσης σε μονωτή (μ,ε,σ=0)</u>

Οι εξισώσεις του Maxwell είναι γενικά:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho_{\text{free}}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{H}=\vec{j}_{free}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Για την περίπτωση μονωτή

$$\rho_{\text{free}}=0\quad,\quad\vec{j}_{free}=0\quad,\quad\vec{D}=\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\quad,\quad\vec{H}=\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}$$

οπότε οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν τη μορφή:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad (1)$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad (2)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad (3)$$

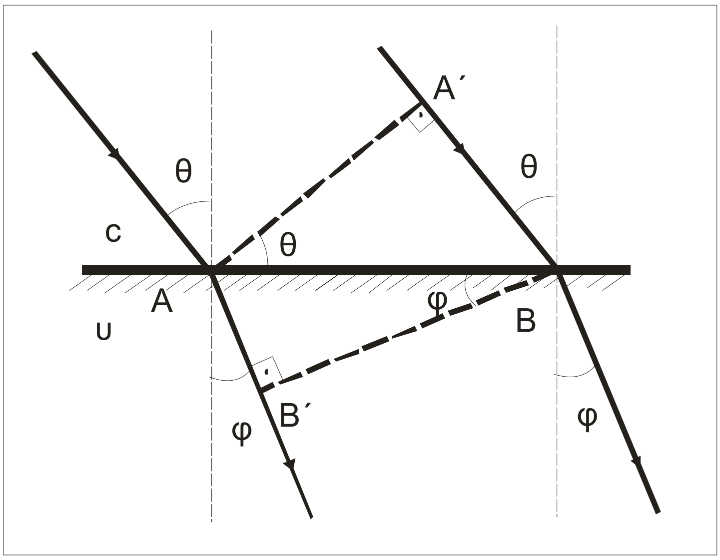
$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad (4)$$

Ακολουθώντας τη γνωστή διαδικασία καταλήγουμε:

$$\boxed{\nabla^2\vec{E}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}} \qquad (5)$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{B}=\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2}} \qquad (6)$$

Η μορφή των εξισώσεων (5) και (6) είναι ίδια με τη μορφή των εξισώσεων (2) στη σελίδα 18. Συμπεραίνουμε ότι το επίπεδο Η/Μ κύμα στο μονωτή θα είναι επίσης εγκάρσιο με ταχύτητα διάδοσης $u=1\big/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$ που είναι μικρότερη της ταχύτητας του φωτός στο κενό $c=1\big/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. Ως δείκτης διάθλασης n ορίζεται το πηλίκο c/u. Προφανώς $n=c/u=\sqrt{\varepsilon\mu}>1$. Πρέπει να τονιστεί ότι αυτός ο ορισμός του η συμπίπτει με εκείνο της γεωμετρικής οπτικής όπου $n_{\Gamma.\text{O}.}=\sin\theta/\sin\varphi$ με θ τη γωνία πρόσπτωσης και φ τη γωνία διάθλασης (Σχήμα 11).




$$t_{A'B}=t_{AB'}$$

$$\frac{A'B}{c}=\frac{AB'}{u}$$

$$n\equiv\frac{c}{u}=\frac{A'B}{AB'}=$$

$$=\frac{AB\sin\theta}{AB\sin\varphi}\equiv n_{\Gamma.\text{O}.}$$

Σχήμα 11

**4. <u>Ατελής μονωτής-Εισαγωγή στην έννοια της μιγαδικής διηλεκτρικής σταθεράς</u>**

Όταν ο μονωτής δεν είναι τέλειος, τότε στο διαδιδόμενο Η/Μ πεδίο εμφανίζεται μια διαφορά φάσης θ, μεταξύ των $\vec{E}$ και $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}$. Στην περίπτωση αυτή, η διηλεκτρική σταθερά δεν μπορεί να εκφραστεί σαν το πηλίκο των $\vec{D}$ και $\vec{E}$. Η σχέση μεταξύ των $\vec{D}$ και $\vec{E}$ εκφράζεται καλύτερα με μια μιγαδική διηλεκτρική σταθερά:

$$\varepsilon=\varepsilon_\pi-i\varepsilon_\varphi=\sqrt{\varepsilon_\pi^{\,2}+\varepsilon_\varphi^{\,2}}\cdot e^{i\theta} \quad , \quad \tan\theta=\frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_\pi}$$

Βρίσκεται πειραματικά, ότι κατά τη διάδοση Η/Μ κύματος διαμέσου ατελούς διηλεκτρικού, το τελευταίο θερμαίνεται λόγω απορρόφησης ενέργειας από το κύμα (διηλεκτρικές απώλειες). Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφάλαιο, η ενέργεια που μεταφέρει ένα κύμα, είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους του κύματος. Κατά συνέπεια, αναμένουμε εξασθένηση του πλάτους του Η/Μ κύματος κατά τη διάδοση του σε ατελή μονωτή. Θα δούμε παρακάτω ότι οι απώλειες αυτές λαμβάνονται πλήρως υπόψη από την έκφραση (1) της διηλεκτρικής σταθεράς ως μιγαδική ποσότητα. Στην ανάλυση που ακολουθεί, θα θεωρήσουμε ότι για τον ατελή μονωτή ισχύει:

$$\varepsilon_\pi >> \varepsilon_\varphi \quad (2)$$

Παίρνοντας μ=1, η σχέση (5) της προηγούμενης παραγράφου γράφεται:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \left(\varepsilon_\pi - i\varepsilon_\varphi\right) \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Αναζητούμε λύση της μορφής :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - k^* z)}$$

Τότε:

$$-k^{*2} = \varepsilon_0 \mu_0 \left(\varepsilon_\pi - i\varepsilon_\varphi\right)\left(-\omega^2\right) \Rightarrow k^{*2} = \varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi \omega^2 - i\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\varphi \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^* = \sqrt{\left[\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi \omega^2 - i\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\varphi \omega^2\right]} \Rightarrow k^* = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi} \cdot \sqrt{1 - i\frac{\varepsilon_\varphi}{\varepsilon_\pi}}$$

δηλαδή

$$k^* = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi} \cdot \left(1 - i\frac{\varepsilon_\varphi}{2\varepsilon_\pi}\right) \quad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην έκφραση του Ε έχουμε:

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi}\cdot z + i\omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi}\cdot\frac{\varepsilon_\varphi}{2\varepsilon_\pi}\cdot z)}$$

ή

$$\boxed{E = E_0 e^{-az} \cdot e^{i(\omega t - kz)}}$$

όπου $a = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi} \cdot \frac{\varepsilon_\varphi}{2\varepsilon_\pi}$ και $k = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0 \varepsilon_\pi}$

## 5. Η κυματική εξίσωση σε αγωγό (ε, μ, σ)

Στο αγώγιμο μέσο το ταλαντούμενο πεδίο δημιουργεί ρεύματα ($\vec{j} = \sigma\vec{E}$ νόμος του Ohm). Αυτή είναι και η διαφορά μεταξύ αγωγού και μονωτή για την περίπτωσή μας . Οι αντίστοιχες εξισώσεις του Maxwell θα είναι:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\mu_0 (\vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Προσοχή δεν υπάρχει ρ στις εξισώσεις (γιατί;)
Με τη γνωστή διαδικασία καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$-\nabla^2 \vec{E} = -\mu_0 \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Κατ΄ αρχήν για κύμα διαδιδόμενο στον z - άξονα και χωρίς εξαρτήσεις από τα x ,y η παραπάνω εξίσωση απλοποιείται στην :

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu_0 \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \qquad (1)$$

Αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο βρίσκεται η εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \mu_0 \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

**Α. <u>Αναζήτηση εμπειρικής λύσης της σχέσης (1)</u>**

Λόγω της δημιουργίας ρευμάτων, ενέργεια του κύματος θα καταναλίσκεται υπό μορφή θερμότητας Joule και κατά συνέπεια το κύμα βαθμιαία θα εξασθενεί. Αυτό σημαίνει ότι $E_0=E_0(z)$. Αναζητούμε λύση της μορφής:

$$E = E_0 e^{-az} \sin(\omega t\text{-kz}) \qquad (2) \qquad \text{(φθίνον Η/Μ κύμα)}$$

(Θα μπορούσατε να εκφράσετε τη φθορά του κύματος με ένα όρο α /z αντί του $e^{-\alpha z}$ ;)
Αντικαθιστώντας τη λύση (2) στην (1) καταλήγουμε:

$$\left(a^2 - k^2\right) = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \omega^2 = -\frac{\omega^2}{u^2} \qquad (3)$$

και

$$2ak = \mu_0 \mu\sigma\omega \qquad (4)$$

Σημειώστε ότι το μέγεθος u αντιπροσωπεύει ταχύτητα διάδοσης για σ=0.

Για μεταλλικό αγωγό και για συχνότητες ω κάτω από την οπτική περιοχή ο όρος $\frac{\omega^2}{u^2}$ είναι πολύ μικρός($\frac{\omega}{u} \to 0$), οπότε λόγω της (3) θα είναι $a \approx k$ και η (4) δίνει $2a^2 = \mu_0 \mu\sigma\omega$ δηλαδή $a = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu\sigma\omega}{2}}$ (5) . Η ποσότητα $\delta = \frac{1}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \mu\sigma\omega}}$ (6)
λέγεται ***<u>επιδερμικό βάθος (skin depth).</u>*** Η (2) γράφεται $E = E_0 e^{-z/\delta} \sin(\omega t - \mathrm{kz})$ . Για $z = \delta$ , $E = \left(E_0/e\right) \cdot \sin(\omega t - \mathrm{kz})$ . Προφανώς το $\delta$ εκφράζει ή καλύτερα αποτελεί ένα μέτρο του μήκους μέσα στον αγωγό που το Ε πέφτει στο 1/e της τιμής που έχει στην επιφάνεια. Το δ στην ουσία μετρά το βάθος στο οποίο ένα Η/Μ κύμα μπορεί να εισχωρήσει μέσα σε ένα αγωγό. Το φυσικό περιεχόμενο της έννοιας του επιδερμικού βάθους και οι αντίστοιχες τεχνολογικές εφαρμογές φαίνονται στα συνοπτικά παραδείγματα που ακολουθούν.

**ι.** Είναι προφανές ότι ένας αγωγός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως ασπίδα (κλωβός) για την προστασία μιας περιοχής από Η/Μ κύματα, αν το πάχος του εκλεγεί κατάλληλα.

**ιι.** Έστω μια συσκευή που πρέπει να χρησιμοποιεί άργυρο (ακριβό υλικό) σε ένα σύστημα που δουλεύει σε συχνότητα μικροκυμάτων($\nu=10^{10}$c/s).Είναι $\delta_{αργ.}=9.210^{-5}$ cm Αυτό σημαίνει ότι τα διάφορα εξαρτήματα από άργυρο μπορούν να αντικατασταθούν από επαργυρωμένα εξαρτήματα ορειχάλκου (φθηνό υλικό) περιορίζοντας έτσι σημαντικά το κόστος της συσκευής.

**ιιι.** Συχνά στην επικοινωνία υποβρυχίου με επίγειο σταθμό τίθεται το ερώτημα της συχνότητας που θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί. Για την περίπτωση θαλάσσιου νερού και για υποβρύχιο σε βάθος 1m από την επιφάνεια της θάλασσας (δ=1m) ο τύπος του επιδερμικού βάθους δίνει $\nu = 58.6\ 10^3$c/s $\approx$ 60KHz.

**Β. <u>Απευθείας επίλυση της σχέσης (1)</u>**

Αναζητούμε λύση της μορφής: $E = E_0 e^{i(\omega t - k^* z)}$ (7)

Αντικαθιστώντας την (7) στην (1) και εκτελώντας τις παραγωγίσεις καταλήγουμε στη σχέση :

$$-k^{*2} = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \omega^2 + i\mu_0 \mu \sigma \omega \qquad (8)$$

Άρα το κ* είναι μιγαδικός αριθμός. Θέτοντας

$$k^* = k - i \cdot a \qquad (9)$$

Η αναζητούμενη λύση (7), παίρνει τη μορφή της $E = E_0 e^{-az} \cdot e^{i(\omega t - kz)}$ που αντιστοιχεί απόλυτα στη σχέση (2) της σελίδας 40.

Από την (9) έχουμε : $k^{*2} = k^2 - a^2 - 2 \cdot i \cdot a \cdot k$, η οποία συνδυαζόμενη με την (8) μας δίνει :

$$\left(a^2 - k^2\right) = -\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \omega^2$$

και $$2ak = \mu_0 \mu \sigma \omega$$

Διαπιστώστε ότι το σύστημα αυτό είναι το ίδιο με εκείνο των σχέσεων (3) και (4) της σελίδας 45. Η λύση του δίνει:

$$k = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2} + 1}$$

$$a = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2} - 1}$$

Για σ=0 προκύπτει $k = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} = \omega / u$ και α=0, όπως αναμενόταν.

Για $\sigma \neq 0$, λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$E = E_0 e^{-az} e^{i(\omega t - kz)} = E_0(z) e^{i(\omega t - kz)}$$ , δηλαδή ο όρος διάδοσης

έχει την γνωστή έκφραση : $e^{i(\omega t - kz)}$, η ταχύτητα $u_\alpha$ μέσα στον αγωγό θα δίνεται από το τύπο :

$$u_\alpha = \frac{\omega}{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega}\right)^2} + 1}} \qquad (10)$$

Η $u_\alpha$ εξαρτάται από τη συχνότητα ($u_\alpha = u_\alpha(\omega)$, το φαινόμενο καλείται **διασκεδασμός** ) και είναι μικρότερη από την ταχύτητα στον τέλειο μονωτή $u_\mu = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu}}$.

Το αντίστοιχο μήκος κύματος θα είναι $\lambda_{αγωγου} = 2\pi \frac{u_\alpha}{\omega} < \lambda_{μονωτη}$.

Στο επόμενο κεφάλαιο περιγράφεται ένα μοντέλο για τη συμπεριφορά των ηλεκτρονίων μέσα στην ύλη όταν προσπίπτει Η/Μ κύμα και εξηγείται η εξάρτηση της ταχύτητας και κατ΄ επέκταση της διηλεκτρικής σταθεράς και του δείκτη διάθλασης από τη συχνότητα του Η/Μ κύματος.

Το πραγματικό μέρος κ του κυματαριθμού κ* είναι κ=2π/λ, όπου λ το μήκος κύματος μέσα στον αγωγό. Το φανταστικό μέρος του α, είναι το αντίστροφο της απόστασης δ κατά την οποία το πλάτος του διαδιδόμενου κύματος ελαττώνεται κατά τον παράγοντα e.

Μια άλλη έκφραση του κ* είναι και η ακόλουθη:

$$\kappa^* = |\kappa^*| e^{-i\Omega} = |k^*| (\cos\Omega - i\sin\Omega))$$

Από τη σχέση $k^* = k - ia$ προκύπτει ότι :

$$k = |\kappa^*| \cos\Omega \quad , \quad a = |\kappa^*| \sin\Omega$$

με

$$|\kappa^*| = \sqrt{k^2 + a^2} = \omega \cdot \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu} \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{1}{\left(\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma}\right)^2}}$$

και

$$\tan\Omega = \frac{a}{k} = ... = \sqrt{1 + \left(\frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma}\right)^2} - \frac{\omega\varepsilon_0\varepsilon}{\sigma}$$

Αντικαθιστώντας το $k^* = k - ia$ στη σχέση (7) έχουμε:

$$E = E_0 e^{-az} \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

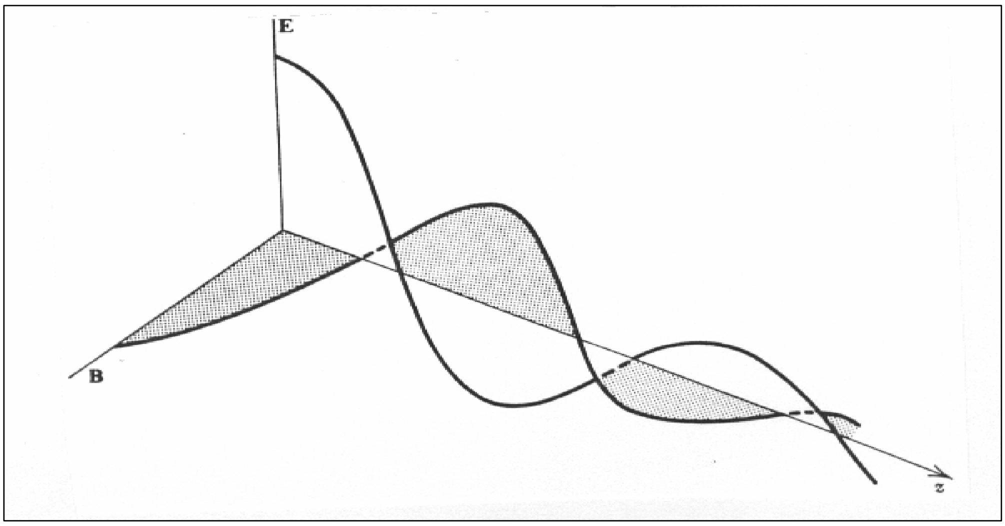
Διαπιστώνουμε αμέσως ότι το πλάτος του $\vec{E}$ ελαττώνεται με την απόσταση κατά τη διεύθυνση διάδοσης, λόγω του παράγοντα $e^{-az}$. Η ύπαρξη του όρου αυτού οφείλεται στην αγωγιμότητα σ (αφού $a \neq 0$ μόνο όταν $\sigma \neq 0$) και προφανώς σχετίζεται με την απώλεια ενέργειας του κύματος και μετατροπής του σε θερμότητα λόγω της ωμικής κατανάλωσης.

Ακολουθώντας τη διαδικασία των σελίδων 34,35 βρίσκουμε:

$$\vec{B} = \hat{z} \times \frac{\vec{E}}{\omega / k^*}$$

οπότε:

$$\vec{B} = \hat{z}x \frac{k^*}{\omega} E = \hat{z}x \frac{|k^*| e^{-i\Omega}}{\omega} E_0 e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - kz)} = \hat{z}x E_0 \frac{|k^*|}{\omega} e^{-\alpha z} e^{i[(\omega t - kz) - \Omega]} \quad .$$




Σχήμα 12

Το συμπέρασμα που εξάγεται είναι ότι τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ εξακολουθούν να είναι κάθετα μεταξύ τους ως προς τη διεύθυνση διάδοσης (εγκάρσια κύματα) αλλά παρουσιάζουν διαφορά φάσης.( Σημειώστε την σχέση πλατών μεταξύ $\vec{E}$ και $\vec{B}$ ) .

**Ο καλός αγωγός**

Η σχέση (8) γράφεται:

$k^{*2} = \omega\varepsilon\varepsilon_0(\omega\mu\mu_0) - i\cdot\sigma\cdot(\omega\mu\mu_0)$

Για $\sigma >> \omega\varepsilon\varepsilon_0$ (χαμηλές συχνότητες) θα έχουμε : $k^{*2} \cong -i\cdot\sigma\cdot(\omega\mu\mu_0)$ και

$$k^* = \sqrt{-i}\sqrt{\sigma\omega\mu\mu_0} \qquad (11)$$

Αλλά $\quad -i = e^{-i\pi/2} \Rightarrow \sqrt{-i} = e^{-i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{i\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{-i} = \frac{(1-i)}{\sqrt{2}}$

Τότε η (11) γίνεται
$$k^* = (1-i)\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}} \qquad (12)$$

δηλαδή οι συντελεστές του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του κ* είναι ίσοι για την περίπτωση καλού αγωγού.

Λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (9) καταλήγουμε ότι:

$$k = a = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}} \qquad (13)$$

που είναι ίδια με τη σχέση (5) της σελίδας 45. Άρα

$\vec{E} = E_0 e^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}}\cdot z} \cdot e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}}\cdot z)}$ (14). Επίσης : $\vec{B} = E_0\frac{|k^*|}{\omega} e^{-\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}}\cdot z} \cdot e^{i(\omega t - \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}}\cdot z - \frac{\pi}{4})}$ (15).

**Στην πράξη αν $\sigma/\omega\varepsilon\varepsilon_0 > 100$ το υλικό θεωρείται καλός αγωγός.**

Για $\sigma/\omega\varepsilon\varepsilon_0 > 10$ το υλικό θεωρείται κακός αγωγός , για $\sigma/\omega\varepsilon\varepsilon_0 < 10^{-1}$ το υλικό θεωρείται κακός μονωτής , και για $\sigma/\omega\varepsilon\varepsilon_0 < 10^{-3}$ το υλικό θεωρείται τέλειος μονωτής.

**<u>Η φυσική σημασία της σχέσης</u>** : $\sigma >> \omega\varepsilon\varepsilon_0$: Επισημαίνουμε ότι στους αγωγούς η πυκνότητα $\vec{j}$ είναι το άθροισμα δύο όρων, εκείνου του ρεύματος μετατόπισης : $|\vec{j}_\mu| = \left|\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right| = \left|\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right|$ και εκείνου του ρεύματος αγωγιμότητας: $|\vec{j}_\alpha| = |\sigma\cdot\vec{E}|$.

Για ηλεκτρικό πεδίο της μορφής $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \kappa\cdot z)}$, είναι $|\vec{j}_\mu| = |\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}|$.

Στην περίπτωση καλού αγωγού, η αγωγιμότητα σ είναι της τάξης των $10^7$mho/m, οπότε η συχνότητα (για την οποία οι δύο όροι της πυκνότητας ρεύματος είναι ίσοι), είναι $\omega = 36\pi \times 10^{16}$rad/s, που είναι στην οπτική περιοχή του φάσματος. Για συχνότητες πολύ μικρότερες εκείνης της οπτικής περιοχής (π.χ. $10^{11}$Hz, περιοχή μικροκυμάτων), το ρεύμα μετατόπισης μπορεί να θεωρηθεί αμελητέο ως προς το ρεύμα αγωγιμότητας. Με άλλα λόγια η σχέση $\vec{j}_\alpha >> \vec{j}_\mu$ συνεπάγεται $\sigma >> \omega\varepsilon\varepsilon_0$. Σημειώστε ότι στη σελίδα 45 η σχέση αυτή εκφράσθηκε ισοδύναμα με την $\omega^2/u^2 << 1$, για ω αρκετά κάτω της οπτικής περιοχής συχνοτήτων.

Επειδή για καλό αγωγό $\varepsilon \to 1$ η σχέση $\sigma >> \omega\varepsilon\varepsilon_0$ συναντάται και ως $\sigma >> \omega\varepsilon_0$. Θεωρώντας εκ των προτέρων τη σχέση $\sigma >> \omega\varepsilon_0$, η εξίσωση (1) της σελίδας 45 θα μπορούσε να πάρει τη μορφή : $\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ (16)

Αντίστοιχα για το μαγνητικό πεδίο : $\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial z^2} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ (17)

Διαπιστώστε ότι αναζητώντας λύση της μορφής $\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - \kappa^* \cdot z)}$, καταλήγουμε πάλι στις εκφράσεις (13) και (14).

Η φασική ταχύτητα των Η/Μ κυμάτων στον καλό αγωγό

$$u = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\sigma\omega\mu\mu_0}{2}}} = \sqrt{\frac{2\omega}{\sigma\mu\mu_0}}$$

εξαρτάται από τη συχνότητα και γενικά είναι πολύ μικρότερη από εκείνη στον τέλειο μονωτή, $u = \sqrt{1/\varepsilon_0\varepsilon\mu\mu_0}$ όπου u είναι ανεξάρτητη της συχνότητας.

**Γιατί $\rho = 0$ στον αγωγό .**

Στην αρχική αντιμετώπιση του θέματος της διάδοσης των Η/Μ κυμάτων μέσα στον αγωγό, ξεκινήσαμε θέτοντας ρ=0 στις εξισώσεις του Maxwell. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι αυτό είναι το αποτέλεσμα της αρχικής ηλεκτρικής ουδετερότητας του αγωγού και αν εμφανιστεί μια πυκνότητα ελεύθερου φορτίου σε κάποιο σημείο του αγωγού, τότε αμέσως σε κάποιο άλλο σημείο εμφανίζεται ίση και αντίθετη πυκνότητα, ώστε ο αγωγός να είναι συνολικά ουδέτερος. Μια τέτοια αντιμετώπιση πάσχει κατ΄ αρχήν από το γεγονός ότι οι εξισώσεις του Maxwell, με τη διαφορική τους μορφή, αναφέρονται κάθε φορά σε συγκεκριμένο σημείο του αγωγού και όχι σε όλη την έκτασή του. (Επομένως γι αυτό το συγκεκριμένο σημείο η πρώτη εξίσωση Maxwell θα γράφεται $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0$ , όπου $\rho$ η πυκνότητα του φορτίου στο εν λόγω σημείο) . Θα αποδείξουμε ότι οποιαδήποτε εμφάνιση πυκνότητας ελεύθερων φορτίων σ΄ ένα καλό αγωγό, δεν μπορεί να διατηρηθεί και φθίνει ακαριαία. Πράγματι, έστω ότι κάποια χρονική στιγμή υπάρχει μία πυκνότητα φορτίου $\rho_f$ . Τότε $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ . Το αντίστοιχο φορτίο τείνει να ανακατανεμηθεί έτσι ώστε να επιτευχθεί στατική ισορροπία . Κατά την διαδικασία της ανακατανομής αναπτύσσεται ένα ρεύμα $j_f$ και ισχύει η εξίσωση $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0$ .

Από τις σχέσεις : $\vec{j}_f = \sigma\vec{E}$ και $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$, προκύπτει ότι $\vec{j}_f = \frac{\sigma\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}$

και $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}_f = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{\nabla} \cdot \vec{D}$. Αλλά, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{free}$. Άρα $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\rho_{free}$ . Λαμβάνοντας υπόψη και την εξίσωση της συνέχειας $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} + \frac{\partial \rho_{free}}{\partial t} = 0$, καταλήγουμε στη σχέση $\frac{\sigma\ \rho_{free}}{\varepsilon\varepsilon_0} + \frac{\partial \rho_{free}}{\partial t} = 0$, που έχει λύση την

$$\rho_{free}(\vec{r}, t) = \rho_{0,free}(\vec{r}) \cdot e^{-\sigma/\varepsilon\varepsilon_0 \cdot t}$$

Η σταθερά $\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$ έχει διαστάσεις χρόνου και καλείται **<u>χρόνος εφησυχασμού.</u>**

*Επειδή σ=1/ρ, οι μονάδες της αγωγιμότητας είναι (Ωhm$^{-1}$ . m$^{-1}$)* $\equiv (\Omega m)^{-1}$ *. Συνήθως οι μονάδες της αγωγιμότητας εκφράζονται σε* $mho \cdot m^{-1}$ *(mho :αναγραμματισμός της λέξης Ohm ) ή ισοδύναμα σε (Siemens .m$^{-1}$). (1 Siemens$\equiv$1S$\equiv$1 Ohm$^{-1}$$\equiv$ 1mho) .΄*

Ο χρόνος εφησυχασμού, για την περίπτωση φτωχού αγωγού ( π.χ για απεσταγμένο νερό με $\sigma \cong 2x10^{-4}(\Omega m)^{-1}$, $\varepsilon = 80$) βρίσκεται $\tau = 3x10^{-6}\sec$ . Προφανώς είναι πολύ μικρός, οπότε τα τυχόν παρουσιαζόμενα ελεύθερα φορτία εξαφανίζονται σχεδόν αυτόματα .

Για την περίπτωση όμως καλού αγωγού (π.χ. για χαλκό με σ=5.76x10$^7$(Ωm)$^{-1}$ και παίρνοντας ε=1 ) βρίσκουμε τ=1.54x10$^{-19}$ sec . Η τιμή αυτή του $\tau$ δεν είναι αποδεκτή καθ΄ όσον σε αυτή την κλίμακα του χρόνου ο νόμος του Ohm δεν ισχύει (ο χρόνος $\tau$ είναι μικρότερος του μέσου χρόνου που απαιτείται για την σύγκρουση των ηλεκτρονίων με τα άτομα του υλικού) .

Μια πιο ρεαλιστική θεώρηση του θέματος είναι η ακόλουθη . Για $\sigma$ >> μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (16) και (17) . Η σχέση (17) π.χ για μία διάσταση γράφεται $\frac{\partial^2 B}{\partial^2 z} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial t}$ . Για ένα κομμάτι καλού αγωγού μπορούμε να προχωρήσουμε περαιτέρω κάνοντας τις ακόλουθες προσεγγίσεις : $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\Delta \mathrm{B}}{\Delta z} = \frac{\mathrm{B}-\mathrm{B}_0}{\Delta z} \approx \frac{\mathrm{B}}{\ell}$, όπου $\mathrm{B}$ μία τυπική τιμή του μαγνητικού πεδίου και $\ell$ ένα χαρακτηριστικό μήκος του αγωγού .

Άρα $\frac{\partial^2 B}{\partial^2 z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{B}{\ell}\right) = \frac{1}{\ell}\left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) = \frac{1}{\ell}\frac{B}{\ell} = \frac{B}{\ell^2}$ .

Αντίστοιχα $\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\mathrm{B}}{\tau}$ όπου $\tau$ ο χρόνος εφησυχασμού. Έτσι η σχέση (17) προσεγγιστικά γράφεται $\frac{B}{\ell^2} = \mu\mu_0\sigma\frac{\mathrm{B}}{\tau}$ και συνεπώς $\tau = \mu_0\mu\sigma\,\ell^2$ . Για ένα κομμάτι χαλκού ($\mu = 1$) μήκους $\ell = 1cm$ , βρίσκουμε $\tau \cong 10^{-2}\sec$ που αποτελεί ένα χονδρικό υπολογισμό του χρόνου εφησυχασμού , συμβατό με τον νόμο του Ohm.

Προφανώς αν η περίοδος του Η/Μ κύματος είναι μεγαλύτερη του χρόνου εφησυχασμού ( Τ>τ=$\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$ ) τότε το ηλεκτρικό πεδίο δεν μπορεί να διατηρηθεί, αφού σε μικρότερο χρόνο από την περίοδό του η πυκνότητα ελεύθερων φορτίων μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι τα χαμηλόσυχνα πεδία σε καλούς αγωγούς δεν διαδίδονται. Αν όμως το πεδίο είναι υψίσυχνο ώστε Τ<τ=$\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$, το Η/Μ πεδίο θα διατηρηθεί. Μέχρις η πυκνότητα των ελευθέρων φορτίων να καταρρεύσει, αυτό θα έχει προλάβει να διαδοθεί αρκετά μήκη κύματος. Αν λοιπόν Τ<<$\frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}$, (π.χ. όταν Η/Μ κύμα πολύ υψηλής συχνότητας προσπέσει σε πολύ καλό αγωγό) τότε μπορεί το κύμα να διαπεράσει τον αγωγό. Αυτό εξηγεί γιατί τα μέταλλα είναι "διαπερατά" στις ακτίνες Χ (βλ. και σ.59). Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξετάσουμε το θέμα της διάδοσης Η/Μ κυμάτων στην ύλη από διαφορετική γωνία, θα καταλήξουμε όμως στα ίδια συμπεράσματα.

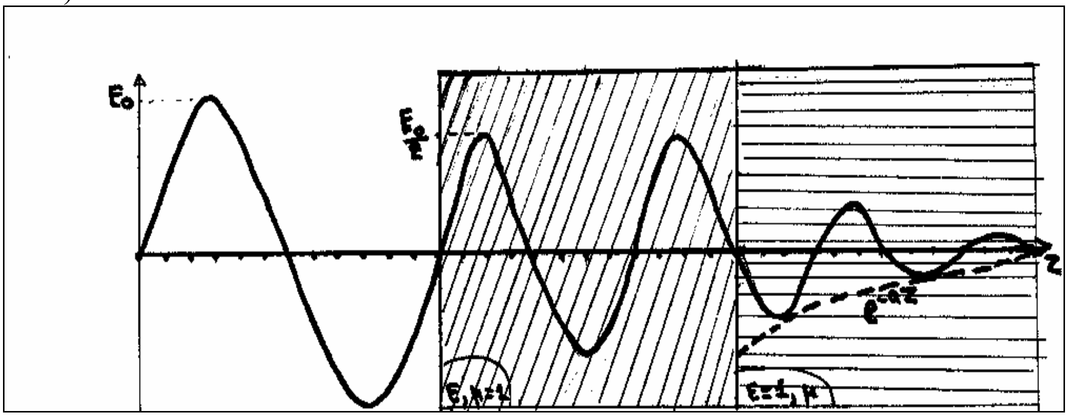
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**1.** Η/Μ κύμα διαδίδεται σε ένα μέσο. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει τη μορφή $\vec{E} = 10\cdot\cos(10^8 t - 3z)\hat{i}\ V/m$. Προσδιορίστε αν το μέσο που διαδίδεται το κύμα είναι κενό, τέλειος μονωτής ή αγωγός. Προσδιορίστε επίσης το μαγνητικό πεδίο Β.

Επειδή το πλάτος είναι σταθερό το μέσον δεν μπορεί να είναι αγωγός. Η ταχύτητα του κύματος είναι $u = \frac{\omega}{k} = \frac{10^8 s^{-1}}{3m^{-1}} = 3.33\times10^7 (m/s) < c$. Αφού $u < c$ το μέσο δεν είναι κενό αλλά μονωτής.

$$\vec{B} = \frac{\vec{E}}{u}\cos(\omega t - kz)\hat{j}\,T = \frac{10}{10^8/3}\cos(10^8 t - 3z)\hat{j}\,T \Rightarrow \vec{B} = 3\times10^{-7}\cos(10^8 t - 3z)\hat{j}\,T$$

**2.** Επίπεδο Η/Μ κύμα (μήκους κύματος λ) προσπίπτει κάθετα σε σύστημα μονωτικής επιφάνειας (ε , μ=1) και αγώγιμης πλάκας (ε=1, μ) σε επαφή. Αν Εο το πλάτος της ηλεκτρικής του συνιστώσας στον αέρα σχεδιάστε την εξέλιξη του κύματος διαμέσου του συστήματος (αγνοήστε φαινόμενα ανάκλασης στις διαχωριστικές επιφάνειες των μέσων).




Σχήμα 13

Μέσα στον μονωτή το πλάτος του ηλεκτρικού πεδίου γίνεται Εο/ε και παραμένει σταθερό, το δε μήκος κύματος μικραίνει αφού η ταχύτητα από $u = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ γίνεται $u = 1/\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}$ . Μέσα στον αγωγό το πλάτος του κύματος πέφτει εκθετικά με την απόσταση και πρακτικά μηδενίζεται μετά από διαδρομή μερικών δ, το δε μήκος κύματος μικραίνει ακόμη περισσότερο.

**3.** Επίπεδο Η/Μ κύμα $E = E_o\sin(kz - \omega t)$ προσπίπτει σε αγώγιμο μέσο (μ, σ).

α. Υπολογίστε το βάθος που το πλάτος του παραπάνω κύματος θα γίνει το 10% της αρχικής τιμής.

β. Μια συσκευή που πρέπει να δουλέψει σε συχνότητα μικροκυμάτων ($\nu=10^{10}$Hz) είναι απαραίτητο για πειραματικούς λόγους να αναφέρονται στην αγωγιμότητα να χρησιμοποιηθούν εξαρτήματα από άργυρο. Διατίθενται τα παρακάτω υλικά:

| | σ(mhos/m) | Κόστος |
|---|---|---|
| Ag | $3x10^7$ | ακριβό υλικό |
| W | $1.8x10^7$ | ενδιαμέσου κόστους υλικό |
| Cu | $5.7x10^7$ | σχετικά φθηνό υλικό |

Υποθέστε μ=1 για όλα τα παραπάνω υλικά.
Προτείνετε τη φθηνότερη λύση στην κατασκευή των μεταλλικών εξαρτημάτων που να ανταποκρίνεται στις απαιτήσεις του πειράματος.

α. Κατά την άσκηση

$$E = E_o e^{-z/\delta} = 0.1E_o \Rightarrow e^{-z/\delta} = 0.1 \Rightarrow -z/\delta = -2.3 \Rightarrow z = 2.3\delta = 2.3\sqrt{\frac{2}{\mu_o \mu \sigma \omega}}$$

β. $\delta_{Ag} = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_o \mu \sigma \; 2\pi \nu}} = 0.092 \times 10^{-5} m$

Άρα η συσκευή θα αποτελείται από χαλκό (Cu που είναι το φθηνότερο υλικό) επικαλυμμένο με Ag πάχους δ τουλάχιστον 0.92 μm.

**4.** Επίπεδο Η/Μ κύμα $\vec{E} = 2e^{-az}\sin(10^8 t - kz)\ \hat{j}\ V/m$ διαδίδεται σε μέσο χαρακτηριζόμενο από ε=1, μ=20, σ=3mhos/m. Να βρεθούν οι σταθερές α και k και η μαγνητική διέγερση $\vec{H}$.

Επειδή $\dfrac{\sigma}{\varepsilon_o \varepsilon\ \omega} = 3393 > 100$ το υλικό μας είναι καλός αγωγός.

Άρα $a = k = \sqrt{\dfrac{\mu_o \mu \sigma \omega}{2}} = 61.4\ m^{-1}$

οπότε $\vec{H} = \dfrac{\vec{B}}{\mu_o \mu} = \dfrac{1}{\mu_o \mu}\dfrac{|k^*|}{\omega}\vec{E}e^{-i\Omega}$ κάθετα στον χ άξονα με $|k^*| = \sqrt{a^2 + k^2} = \sqrt{2}a$ και

$\Omega = \dfrac{\pi}{4}$ για καλό αγωγό.

Άρα $\vec{H} = \dfrac{\sqrt{2}a}{\mu_o \mu \omega} 2e^{-az}\sin(\omega\ t - kz - \dfrac{\pi}{4})\ \hat{i} = 69.1e^{-61.4z}\sin(10^8 t - 61.4z - \dfrac{\pi}{4})\ \hat{i}\ mA/m$

**5.** Δείξτε ότι η ανάλυση του υποκεφαλαίου 4 για τον ατελή μονωτή είναι ισοδύναμη προς την ανάλυση του υποκεφαλαίου 5 για τον αγωγό εφ' όσον ληφθεί υπόψη ότι $\varepsilon_\varphi = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$ και $\varepsilon_\pi = \varepsilon$ .

ατελής μονωτής : $$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\mu_0\varepsilon_0\left(\varepsilon_\pi - i \cdot \varepsilon_\varphi\right)\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (1)$$

αγωγός: $$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \mu\mu_0\sigma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2)$$

Αναζήτηση λύσης στις εξισώσεις (1) και (2) της μορφής: $E = E_o e^{i(\omega\ t - k^* z)}$ (3)

$$\xrightarrow{(1),(3)} k^{*2} = \varepsilon_o \mu_o \mu \, (\varepsilon_\pi - i\varepsilon_\phi)(-\omega^2) = -\varepsilon_o \mu_o \mu \, \omega^2 \varepsilon_\pi + i\varepsilon_o \mu_o \mu \, \varepsilon_\phi \omega^2$$

$$\xrightarrow{(2),(3)} k^{*2} = \mu\mu_o \sigma \, (i\omega\,) + \mu_o \mu \, \varepsilon_o \varepsilon(-\omega^2)$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε :

$\varepsilon_o \mu_o \mu \, \varepsilon_\phi \omega^2 = \mu\mu_o \sigma \, \omega$ και $\varepsilon_o \mu_o \mu \, \omega^2 \varepsilon_\pi = \mu_o \mu \, \varepsilon_o \varepsilon \omega^2$

οπότε $\varepsilon_\phi = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega}$ και $\varepsilon_\pi = \varepsilon$ .

**Γ. <u>Μιγαδικός δείκτης διάθλασης</u>**

Θεωρώντας τη μιγαδική έκφραση του κ$^*$ ,κατά τη σχέση (9) της προηγούμενης παραγράφου, κ$^*$ = κ- i α, θα μπορούσαμε να ορίσουμε γενικότερα μια ταχύτητα κυμάτων $u^* = \frac{\omega}{k^*}$ και συνεπώς ένα δείκτη διάθλασης (δ. δ.)

$$n^* = \frac{c}{u^*} = \frac{c}{\omega / k^*} \qquad (1)$$

Τότε

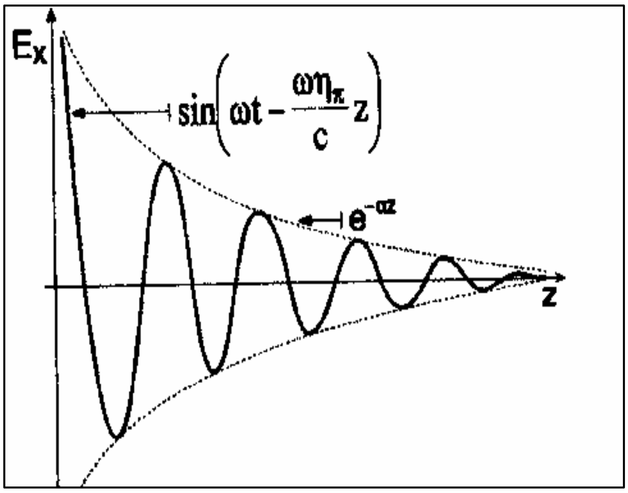
$$n^* = \frac{c}{\omega}(k - ia) = \frac{c}{\omega / k} - i\frac{c}{\omega / a} = n_\pi - in_\phi \qquad (2)$$

Για να δει κανείς τι εκφράζει μια μιγαδική παράσταση του δ. δ. ας θεωρήσουμε το κύμα $E_x = E_{ox} e^{i(\omega\, t - k^* z)} = E_{ox} e^{i\omega\,(t - \frac{k^*}{\omega} z)}$.

Λόγω της σχέσης (1) θα ισχύει : $E_x = E_{ox} e^{i\omega\,(t - \frac{n^*}{c} z)}$, οπότε λαμβάνοντας υπόψη τη (2) προκύπτει:

$$E_x = E_{ox} e^{-\frac{\omega\, n_\varphi}{c} \cdot z} e^{i\omega\,(t - \frac{n_\pi}{c} \cdot z)} \qquad (3)$$

(Συνδέστε τα $\omega \frac{n_\phi}{c}$ και $\omega \frac{n_\pi}{c}$ με τα α και κ αντίστοιχα της σχέσης (2) ,σελ. 40 ).




Σχήμα 14

Διαπιστώστε ότι η (3) αντιπροσωπεύει ένα τρέχον κύμα ταχύτητας $\frac{c}{n_\pi}$ με εκθετικά μειούμενο πλάτος. Το φανταστικό μέρος του δ. δ. αντιπροσωπεύει την εξασθένηση του κύματος λόγω ενεργειακών απωλειών των ατομικών ταλαντωτών όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο. Το πραγματικό μέρος αντιπροσωπεύει αυτό που συνήθως θεωρούμε σαν δ. δ. σ' ένα τέλειο μονωτή.

Σημειώστε τέλος, ότι λαμβάνοντας αρνητικό πρόσημο μπροστά από τον όρο $in_\phi$, καταλήγουμε το $n_\phi$ να είναι θετικός αριθμός, όπως συμβαίνει με όλα τα συνηθισμένα υλικά. Οι φυσικοί λόγοι που επιβάλλουν μιγαδική έκφραση του δ. δ. είναι ανάλογοι αυτών που είδαμε για τη διηλεκτρική σταθερά ε σε προηγούμενη παράγραφο. Πολύ περισσότερο, αφού όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ .

**6. <u>Η κυματική εξίσωση σε φορτισμένο μέσο (ε, μ, σ, $\rho_f$)</u>**

Οι εξισώσεις του Maxwell παίρνουν τη μορφή

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{\text{free}}}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu\mu_0(\vec{j} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t})$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Με τη γνωστή διαδικασία καταλήγουμε στη σχέση:

$$\nabla^2\vec{E} - \mu_o\mu\,\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_o\mu\,\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}\frac{\rho_{\text{free}}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) \qquad (1)$$

Αντίστοιχη εξίσωση για το μαγνητικό πεδίο είναι:

$$\nabla^2\vec{B} - \mu_o\mu\,\sigma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \mu_o\mu\,\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{αφού} \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

Θεωρώντας επίπεδο Η/Μ κύμα που ταξιδεύει κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα z, οι παράγωγοι ως προς χ και y θα είναι μηδέν, άρα $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\partial E_z}{\partial z}$ και συνεπώς:

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}\hat{k}$. Η σχέση (1) επομένως γίνεται :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \mu_o\mu\,\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \mu_o\mu\,\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \mu_o\mu\,\sigma\frac{\partial E_x}{\partial t} - \mu_o\mu\,\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} - \mu_o\mu\,\sigma\frac{\partial E_y}{\partial t} - \mu_o\mu\,\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} - \mu_o\mu\,\sigma\frac{\partial E_z}{\partial t} - \mu_o\mu\,\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}$$

Οι εξισώσεις για τα $E_\chi$ και $E_y$ είναι ίδιες με την περίπτωση αγώγιμου μέσου. Αυτό που έχει ενδιαφέρον είναι η εξίσωση για τη διαμήκη συνιστώσα $E_z$ η οποία περιορίζεται στην

$$\varepsilon_o\varepsilon\,\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \sigma\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0$$

Η γενική λύση αυτής είναι της μορφής: $E_z = a(z) + b(z)e^{-\sigma t/\varepsilon_o\varepsilon}$

Η $E_z$ λοιπόν έχει μια στατική συνιστώσα α(z) που δεν ενδιαφέρει και μια δυναμική συνιστώσα, η οποία φθίνει εκθετικά με το χρόνο με σταθερά $\varepsilon_o\varepsilon / \sigma$ και η οποία δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν κύμα. Άρα γενικά μπορούμε να πάρουμε $E_z=0$, που σημαίνει ότι το κύμα είναι εγκάρσιο.

**Γενικό συμπέρασμα :**
Το επίπεδο Η/Μ κύμα είναι πάντοτε εγκάρσιο.
**ι.** Στο κενό τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι συμφασικά, κάθετα μεταξύ τους και το πεδίο διαδίδεται με την ταχύτητα του φωτός c.
**ιι.** Στον τέλειο μονωτή τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι συμφασικά, κάθετα μεταξύ τους και το πεδίο διαδίδεται με ταχύτητα $u = c/n < c$, χωρίς απώλειες ενέργειας.
**ιιι.** Στον αγωγό τα $\vec{E}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, αλλά παρουσιάζουν διαφορά φάσης φ (για τον καλό αγωγό $\varphi=45^0$) το δε πεδίο διαδίδεται με απώλεια ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμότητα Joule στον αγωγό. Η ταχύτητα σε αγώγιμο υλικό είναι μικρότερη απ' ότι σε μονωτικό υλικό.

## 7. Πλάσμα

Το πλάσμα είναι εν γένει ένα σύνολο από φορτισμένα σωμάτια, συνήθως μείγμα ιόντων και ηλεκτρονίων. Η συμπεριφορά καθ' ενός από αυτά καθορίζεται όχι από την αλληλεπίδραση του με κάποιο συγκεκριμένο γειτονικό σωμάτιο, αλλά από τη συνολική επίδραση των υπολοίπων σωματίων. Συνεπώς απαραίτητη προϋπόθεση για να περιγραφεί ένα σύνολο φορτισμένων σωματιδίων σαν πλάσμα είναι κάθε σωματίδιο να μην επηρεάζεται μόνο από τα γειτονικά του, αλλά κυρίως να υφίσταται μια συνολική επίδραση από όλα τα σωματίδια.

Στο πλάσμα συμβαίνουν διάφορα φαινόμενα όπου δεν μπορούν να γίνουν σε ένα ουδέτερο αέριο. Ένα από αυτά είναι οι ταλαντώσεις που οφείλονται στο διαχωρισμό θετικών - αρνητικών φορτίων. Αυτός ο διαχωρισμός δημιουργεί ηλεκτρικό πεδίο $\vec{E}$ που προκαλεί ταλάντωση των ηλεκτρονίων (η ταλάντωση των ιόντων είναι αμελητέα λόγω της μεγάλης τους μάζας). Η πρώτη εξίσωση Maxwell δίνει $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ ή για μια διάσταση $\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, όπου ρ= N e, N: αριθμητική πυκνότητα.

Άρα $dE(x)\Big|_o^x = \frac{Ne}{\varepsilon_o}dx\Big|_o^x$ ή $E(x) = \frac{1}{\varepsilon_o}Nex$

Η δύναμη Lorentz που δέχεται ένα ηλεκτρόνιο είναι

$$F = qE(x) = -eE(x) = -\frac{1}{\varepsilon_o}Ne^2x = m_e\frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_o}x = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_p^{\ 2}x = 0$$

Δηλαδή τα ηλεκτρόνια ταλαντώνονται με συχνότητα:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m_e\varepsilon_o}} \qquad (1)$$

που καλείται **συχνότητα πλάσματος** .
Μέσα στο πλάσμα μπορούν να διαδοθούν διάφορα κύματα, όπως ηλεκτρομαγνητικά, ιοντοακουστικά κ.α. Κάθε είδος έχει διαφορετική σχέση διασποράς. Τα Η/Μ κύματα τα οποία μας ενδιαφέρουν έχουν την εξής σχέση διασποράς :

$$\omega^2 = \sum_i \omega_p{}^2 + k^2c^2$$

όπου ο δείκτης i αναφέρεται στα είδη των φορτισμένων σωματίων και $\sum_i \omega_p{}^2 = \omega_p{}^2{}_{\iota o\nu\tau\alpha} + \omega_p{}^2{}_{e^-}$ . Όμως $\omega_p{}^2 = \dfrac{e^2 n}{m\varepsilon_o}$ .

Επειδή: $m_e \ll m_{\iota\acute{o}\nu\tau o\varsigma}$ οπότε $\omega_p{}^2{}_{(e-)} \gg \omega_p{}^2{}_{(\iota\acute{o}\nu\tau\omega\nu)}$ .

Άρα η σχέση διασποράς γίνεται: $\omega^2 = \omega_p{}^2 + k^2c^2$ (2)

Βάσει της σχέσης διασποράς (2) υπολογίζουμε τη φασική και ομαδική ταχύτητα καθώς και το δείκτη διάθλασης.

**Φασική ταχύτητα:**

$$u_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega\, c}{(\omega^2 - \omega_p{}^2)^{1/2}} \cdot \frac{c}{(1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2})^{1/2}} \tag{3}$$

$$u_\phi = \frac{\sqrt{\omega_p{}^2 + k^2c^2}}{k} = c\sqrt{1 + \frac{\omega_p{}^2}{k^2c^2}} \tag{4}$$

**Δείκτης διάθλασης:**

$$n = \frac{c}{u_\phi} = \sqrt{1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}} \tag{5}$$

**Ομαδική ταχύτητα:**

$$u_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{k\ c^2}{\sqrt{\omega_p{}^2 + k^2c^2}} \tag{6}$$

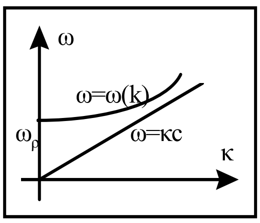
$$u_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p{}^2}{\omega^2}}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει $u_\phi \cdot u_g = c^2$ (7)

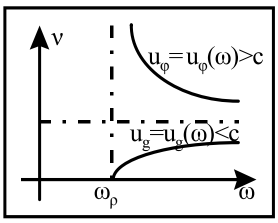
$$u_\phi = \frac{c}{n}, u_g = cn \tag{8}$$

Λόγω της (5) είναι n<1 οπότε $u_\phi > c$ και λόγω της (7) $u_g < c$ οπότε $u_g < u_\phi$ άρα πρόκειται για ομαλό διασκεδασμό.

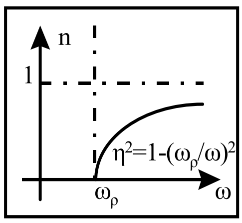
Η σχέση $u_\phi = c/n > c$ δεν έρχεται σε αντίθεση με την ειδική σχετικότητα διότι το Η/Μ κύμα δεν μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία με την $u_\phi$, αλλά με την ταχύτητα ομάδας $u_g$, για την οποία ισχύει $u_g < c$.




Σχήμα 15




Σχήμα 16




Σχήμα 17